Matrices

Exercice 1 :

1 On a $J^2 = nJ$.

Ainsi, $J^3 = J^2J = nJ \times J = nJ^2 = n(nJ) = n^2J$.

Par récurrence, on prouve que, $\boxed{J^p = n^{p-1}J.}$

Commentaires: *Étant donné que dans la preuve de l'hérédité, vous allez vous servir de la relation $J^2 = nJ$, pensez à le dire avant.*

2 Il suffit de décomposer B :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= I_n + J_n$$

Comme I_n et J_n commutent, d'après la formule du binôme de Newton :

$$B^p = (I_n + J_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} I_n^{p-k} J_n^k = I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} I_n^{p-k} J_n^k.$$

Or, $\forall\, k \in \mathbb{N}^\star$, $J_n^k = n^{k-1}J_n$.

$$\text{D'où, } B^b = I_n + \sum_{k=1}^{p} \left[\binom{p}{k} n^{k-1} J_n \right] = I_n + \left[\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} \right] J_n.$$

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^k = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k - 1 \right]$$
$$= \frac{(n+1)^p - 1}{n}$$

Donc, $\forall\, p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\boxed{\begin{aligned} B^p &= I_n + \frac{(n+1)^p - 1}{n} J_n \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{(n+1)^p - 1}{n} & \frac{(n+1)^p - 1}{n} & \cdots & \frac{(n+1)^p - 1}{n} \\ \frac{(n+1)^p - 1}{n} & 1 + \frac{(n+1)^p - 1}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{(n+1)^p - 1}{n} \\ \frac{(n+1)^p - 1}{n} & \cdots & \frac{(n+1)^p - 1}{n} & 1 + \frac{(n+1)^p - 1}{n} \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

Commentaires:

— *Encore une fois, la relation du binôme de Newton ne peut s'employer sans parler la commutation entre* I *et* J *dit d'une manière ou d'une autre.*

— *Dans le même esprit, deux matrices commutent et une loi est commutative cela ne veut rien dire qu'écrire que deux matrices sont commutatives.*

— *La formule sur* J^n *n'était valable qu'à partir de* $n = 1$*. Il fallait donc prendre garde à décomposer la somme.*

Exercice 2 :

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A + A^2$.

Commentaires: *On peut démontrer beaucoup de choses avec la récurrence mais à la condition de bien préciser ce que l'on souhaite montrer.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathcal{P}(n) : \left| \begin{array}{l} A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2 \text{ où } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } (\alpha_n) \text{ et } (\beta_n) \text{ sont deux suites} \\ \text{définies par la relation de récurrence : } \begin{cases} \alpha_1 = 1, & \alpha_{n+1} = 2\beta_n \\ \beta_1 = 0, & \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n. \end{cases} \end{array} \right.$$

— Pour $n = 1$, $A = \alpha_1 A + \beta_1 A^2$ avec $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0. \end{cases}$.

La relation $\mathcal{P}(1)$ est donc vérifiée.

— Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée.
En particulier, $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } A^{n+1} = A^n A &= (\alpha_n A + \beta_n A^2)A \\ &= \alpha_n A^2 + \beta_n A^3 \\ &= \alpha_n A^2 + \beta_n (2A + A^2) \\ &= (2\beta_n)A^2 + (\alpha_n + \beta_n)A^3 \\ &= \alpha_{n+1} A + \beta_{n+1} A^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha_{n+1} = 2\beta_n$ et $\beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$.

On a donc bien trouvé deux suites (α_n) et (β_n) telles que

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \alpha_{n+1} = 2\beta_n \\ \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n. \end{cases}$$

La relation $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée. La propriété est héréditaire.
Vraie à partir de $n = 1$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_1 =, 1 & \alpha_{n+1} = 2\beta_n \\ \beta_1 = 0, & \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n. \end{cases} \tag{XI.1}$$

Il nous reste à montrer la relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci ne réclame plus de récurrence.

En effet, d'après les définitions ci-dessus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_{n+2} = \alpha_{n+1}+\beta_{n+1} = 2\beta_n+\beta_{n+1}$. Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathrm{A}^n = \alpha_n \mathrm{A} + \beta_n \mathrm{A}^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_1 =, 1 & \alpha_{n+1} = 2\beta_n \\ \beta_1 = 0, & \beta_{n+2} = \beta_{n+1} + 2\beta_n. \end{cases}} \tag{XI.2}$$

2. Montrons ce résultat par :

a. une récurrence **simple** sur $n \in \mathbb{N}^*$ à partir de la relation (XI.1).
Pour $n = 1$, on a bien $\dfrac{2(-1)^{1-1} + 2^{1-1}}{3} = 1 = \alpha_1$ et $\dfrac{(-1)^1 + 2^{1-1}}{3} = 0 = \beta_1$.
Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\alpha_n = \frac{2(-1)^{n-1} + 2^{n-1}}{3} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}.$$

D'après (XI.1), on a alors :

$$\alpha_{n+1} = 2\,\beta_n = 2\frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3},$$

et

$$\beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n = \frac{2(-1)^{n-1} + 2^{n-1}}{3} + \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}.$$

La relation est donc héréditaire. Initialisée à partir de $n = 1$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. une récurrence **double** sur $n \in \mathbb{N}^*$ à partir de la relation (XI.2).
Pour $n = 1$, on a $\dfrac{(-1)^1 + 2^{1-1}}{3} = 0 = \beta_1$ et pour $n = 2$, $\dfrac{(-1)^2 + 2^{2-1}}{3} = 1$ avec $\beta_2 = \alpha_1 + \beta_1 = 1$.
Supposons alors qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}$ et $\beta_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}$.
D'après (XI.2), on a alors :

$$\beta_{n+2} = \beta_{n+1} + 2\beta_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} + 2\,\frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} = \frac{(-1)^{n+2} + 2^{n+1}}{3}.$$

La relation est donc héréditaire. Initialisée à partir de $n = 1$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Il est facile de retrouver l'expression de α_n à partir de la relation

$$\alpha_n = 2\beta_{n-1} = 2\,\frac{(-1)^{n-1} + 2^{n-2}}{3} = \frac{2(-1)^{n-1} + 2^{n-1}}{3}.$$

Par les deux raisonnement, on trouve : Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \beta_n = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}.} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \alpha_n = \frac{2(-1)^{n-1} + 2^{n-1}}{3}.}$$

Commentaires: *La suite (β_n) est appelée une suite récurrente* linéaire d'ordre 2. *Leur étude qui sera faite dans un chapitre futur ressemble fortement à celle des équations différentielles* linéaires d'ordre 2.
On commence par résoudre son équation caractéristique $r^2 = r + 2$, dont les solutions sont -1 et 2.
La forme générale de la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors connu et de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \beta_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$

On détermine ensuite les constantes λ et μ à l'aide des « conditions initiales ».
Comme $\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$, *on a* $\begin{cases} -\lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + 4\mu = 1 \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = \frac{1}{6} \end{cases}$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\beta_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}$.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{2(-1)^{n-1} + 2^{n-1}}{3} A + \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} A^2 \\ &= \frac{2(-1)^{n-1} + 2^{n-1}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3} & \dfrac{(-1)^{n-1} + 2^n}{3} & \dfrac{(-1)^{n-1} + 2^n}{3} \\ \dfrac{(-1)^{n-1} + 2^n}{3} & \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} & \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} \\ \dfrac{(-1)^{n-1} + 2^n}{3} & \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} & \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3 $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :

1 D'après l'algorithme de Gauss, P est inversible et on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Après calculs, on trouve $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$.

Commentaires: *On n'écrit pas P^{-1} sans avoir préalablement dit ou montré que P était inversible.*

2 Comme $A = P^{-1}DP$ alors, par récurrence, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P^{-1}D^nP \quad \text{où } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & (-1)^n & 3^n \\ 0 & -2^n & 0 & -3^n \\ 0 & 2^n & 0 & -3^n \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & \dfrac{(-1)^n - 3^n}{2} & \dfrac{(-1)^n - 3^n}{2} & 1 - (-1)^n \\ 0 & \dfrac{2^n + 3^n}{2} & \dfrac{-2^n + 3^n}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2^n + 3^n}{2} & \dfrac{2^n + 3^n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -14 & -14 & 2 \\ 0 & \frac{35}{2} & \frac{19}{2} & 0 \\ 0 & \frac{19}{2} & \frac{35}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -40 & -40 & 0 \\ 0 & \frac{97}{2} & \frac{65}{2} & 0 \\ 0 & \frac{65}{2} & \frac{97}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.