Limites et Continuité

A. **Étude d'une première fonction.**

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

(a) Montrer qu'on peut prolonger la fonction f par continuité en 0. On continuera à noter f la fonction ainsi prolongée.

(b) Quelle est la parité de la fonction f ? En admettant que f est dérivable en 0, que vaut nécessairement $f'(0)$?

(c) Calculer la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

(d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x^2 f'(x).$$

(e) Étudier les variations de la fonction f, puis tracer une allure soignée de sa courbe représentative.

B. **Étude d'une deuxième fonction.**

On définit une nouvelle fonction g par $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (cette fonction est naturellement définie $\mathbb{R}^*$).

(a) Quelle est la parité de la fonction g ?

(b) Étudier la possibilité d'un prolongement par continuité de la fonction g en 0.

(c) Montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 1$.

(d) Montrer que, $\forall\, x \neq 0, g'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - g(x))$. En déduire les variations de la fonction g.

(e) En majorant arctan, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

C. **Une suite récurrente.**

On considère désormais une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ (la valeur de u_0 étant un réel quelconque).

(a) Montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, 0 \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que, si $x > 0$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$, puis que $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Montrer que cette inégalité reste vraie si $x < 0$.
(On admettra pour la suite qu'elle serait également vraie pour $x = 0$, où g est en fait dérivable).

(c) Montrer que la fonction g admet un unique point fixe qu'on notera désormais α, et que $\alpha \in]0, 1]$.

(d) **Hors-Programme** Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|$, puis montrer la convergence de la suite (u_n) vers α.

Aide: En admettant l'inégalité précédente, montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.