Limites et Continuité

A. Étude d'une première fonction.

ⓐ Comme $\arctan(0) = 0$, la fonction f est exactement le taux d'accroissement de la fonction arctangente en 0.
Comme cette dernière est dérivable en 0, sa limite est donc égale à

$$\arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Commentaires: *N'invoquez pas un nombre dérivé sans avoir dit que la fonction est dérivable en ce point. Si ce n'est pas le cas, votre taux d'accroissement restera bien solitaire.*

ⓑ Sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, la fonction f est paire comme quotient de fonctions impaires. Si elle est dérivable en 0, sa dérivée sera impaire et on aura donc $f'(0) = 0$.

Commentaires: *Ce n'est absolument pas une preuve de la dérivabilité de f en 0 mais seulement une condition nécessaire.*

En l'absence de développements limités, nous sommes encore incapables de trouver simplement la limite de $f'(x)$ en 0. Patience !

ⓒ Comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall\, x \neq 0,\ f'(x) = \frac{\dfrac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2}.$$

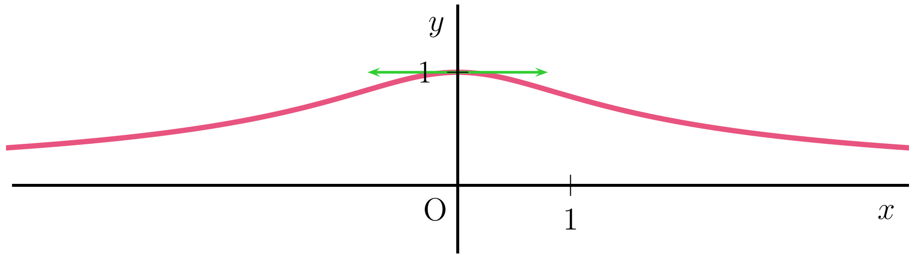
ⓓ Comme les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer une intégration par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)\right) = -\frac{1}{2}x^2 f'(x).\end{aligned}$$

Commentaires: *Point d'intégration par parties sans avoir dit que les fonctions étaient de classe $\mathscr{C}^1$. On fait des mathématiques et non du calcul.*

ⓔ Dans l'égalité précédente, l'intégrale de gauche est positive si $x > 0$ (intégrale d'une fonction positive entre deux bornes placées en ordre croissant), donc f' est négative et f décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Par parité, elle sera croissante sur $]-\infty\,;0[$.
On peut donc dresser le passionnant tableau de variations suivant (les limites sont évidentes puisque la fonction arctan est bornée sur $\mathbb{R}$) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Commentaires: *Même si c'est passé sous silence dans le sujet, la fonction f (son prolongement plutôt) est donc continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Pour peu que nous sachions montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, d'après le théorème de la limite de dérivée, la fonction f sera alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

B. **Étude d'une deuxième fonction.**

(a) Sachant que f est paire sur $\mathbb{R}$, en effectuant le changement de variable évident $u = -t$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on obtient :

$$g(-x) = -\frac{1}{x}\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\int_0^{x} -f(-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = g(x).$$

La fonction g est également une fonction paire sur $\mathbb{R}^*$.

Commentaires: *Sur une idée de l'un d'entre vous, on pouvait aussi profiter de la parité de f pour écrire $g(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.*

Il est alors facile de montrer la parité de g sans changement de variables :

$$g(-x) = \frac{1}{-x}\left(\frac{1}{2}\int_{x}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = g(x).$$

Remarque : *Le changement de variable est bien présent mais dissimulé dans la première formule.*

(b) La fonction g n'est rien d'autre que le taux d'accroissement en 0 de la primitive de f (dérivable donc !) s'annulant en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

On peut à nouveau effectuer un prolongement par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

(c) L'encadrement est évident pour $x = 0$.
Supposons $x > 0$. Comme f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;x]$,

$$\forall t \in [0\,;x]\,,\, f(x) \leqslant f(t) \leqslant 1.$$

Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer cet encadrement entre 0 et x pour en déduire que

$$xf(x) \leqslant \int_0^x f(t)dt \leqslant x.$$

En divisant par x qui est strictement positif, on trouve bien

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant 1.$$

Si $x < 0$, la parité de toutes les fonctions permet d'obtenir le même encadrement.

(d) Par définition, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \neq 0,\ g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}.$$

D'après la question précédente, la fonction g est donc, comme f, croissante sur $]-\infty\,;0]$ puis décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Commentaires: *L'existence et la valeur du nombre dérivée de g en 0 est encore une fois passé sous silence par le sujet. Remarquez que connaître le signe de g' sur $\mathbb{R}^*$ suffit à connaître les variations de g sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

(e) On peut très brutalement majorer la fonction arctan par $\dfrac{\pi}{2}$ pour obtenir

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2x}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln(x)}{2x}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi\ln(x)}{2x} = 0$ par croissances comparées, le théorème des gendarmes permet de conclure.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (l'intégrale étant constante, c'est évident), il suffit d'additionner cette limite à la précédente pour en déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Par parité, l'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe de g en $\pm\infty$.

Commentaires: *Pourquoi ne pas avoir directement majoré $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\frac{\pi}{2x}\int_0^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Tout simplement car la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas continue en 0. Elle n'admet donc pas de primitive sur $[0\,;+\infty[$. Ces intégrales, dites généralisées, seront le propos de votre deuxième année… et de vos concours.*

C. Une suite récurrente.

(a) La positivité est évidente.

De plus, $\dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x-1-x^2}{2\,(1+x^2)} = -\dfrac{(x-1)^2}{2\,(1+x^2)} \leqslant 0$, ce qui prouve la majoration souhaitée.

(b) L'intégrale censée majorer $|g'(x)|$ se calcule :

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x-\arctan(x)}{x^2} = \frac{1-f(x)}{x}.$$

Or, on a prouvé plus haut que $|g'(x)| = \dfrac{|f(x)-g(x)|}{x} \leqslant \dfrac{1-f(x)}{x}$ à cause de l'encadrement de la question B.(c).

En exploitant désormais la question précédente, on en déduit que

$$|g'(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x t\times\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x t\times\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\times\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Bien entendu, la fonction g' étant impaire, l'inégalité reste vraie si $x<0$.

(c) Posons donc $h(x) = g(x) - x,$.

— La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x) - x < 0$ puisque $g'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
  La fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

— De plus, $\lim_{x\to+\infty} g(x)-x=-\infty$ d'après la question B.e et $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ par parité, donc $\lim_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

La fonction h établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et en particulier s'annule une seule fois, ce qui prouve que g admet un unique point fixe α.

Enfin, on calcule $h(0)=g(0)=1$ et $h(1)=g(1)-1\leqslant 0$ (puisqu'on sait que $g(x)\leqslant 1$) pour en déduire que $\alpha\in]0,1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

d On peut appliquer l'IAF (théorème que l'on verra bientôt) sur l'intervalle $\mathbb{R}$ aux valeurs $x=u_n$ et $y=\alpha$ pour obtenir directement $|g(u_n)-g(\alpha)|\leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$, soit $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

On prouve ensuite par récurrence que,

$$\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|.$$

(on ne peut pas faire plus précis sans connaitre la valeur de u_0).

L'initialisation pour $n=0$ est évidente, et l'hérédité également en exploitant l'inégalité obtenue grâce à l'IAF et l'hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{4}\times\frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|=\frac{1}{4^{n+1}}|u_0-\alpha|.$$

L'encadrement $0\leqslant|u_n-\alpha|\leqslant\frac{|u_0-\alpha|}{4^n}$ permet alors, via le théorème des gendarmes, d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$, et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha.$$