Dérivabilité

Partie 1

Soit $x > 0$. On considère la fonction φ_x définie sur $[0\,;x]$ par

$$\varphi_x : \begin{array}{ccc} [0\,;x] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & & e^x - e^t\left(1+(x-t)\right) - (x-t)^2\mathrm{A}. \end{array}$$

où A est une constante réelle.

1. Montrer que l'on peut choisir A de telle sorte que $\varphi_x(0) = 0$.
2. En appliquant la formule des accroissements finis à φ_x, montrer qu'il existe un réel $c_x \in \,]0\,;x[$ tel que
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{c_x}.$$

Partie 2

On considère la fonction f définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

3.
   a. Montrer que f est continue en 0.
   b. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.
   c. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4.
   a. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = (2-x)e^x - 2$ pour $x \geqslant 0$. Dresser le tableau de variation complet de la fonction g.
   b. En déduire que la fonction f' s'annule en un unique réel α et que $\alpha \in \,]1\,;2[$.
   c. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
5.
   a. Déterminer les éventuels points fixes de la fonction f.
   b. Établir $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$ et en déduire $f(\alpha) < \alpha$.
   c. Montrer que $f([0\,;2]) \subset [0\,;2]$.

Partie 3

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par les relations $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0\,;2]$.
7. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
8. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.