Dérivabilité

Correction

Partie 1

1 Comme $x \neq 0$, on a :

$$\varphi_x(0) = 0 \iff e^x - (1+x) - x^2\mathrm{A} = 0 \iff \mathrm{A} = \frac{1}{x^2}\Big(e^x - (1+x)\Big).$$

Dans toute la suite on pose donc $\mathrm{A} = \frac{1}{x^2}\Big(e^x - (1+x)\Big)$ de telle sorte que $\varphi_x(0) = 0$.

2 La fonction φ_x s'exprime comme produits et sommes de fonctions dérivables sur $[0\,;x]$ donc φ_x est continue sur $[0\,;x]$ et dérivable sur $]0\,;x[$.
Par ailleurs, on a $\varphi_x(x) = 0$ et, avec le choix de A en 1, on a également $\varphi_x(0) = 0$.
D'après le théorème de Rolle, on obtient :

$$\exists\, c_x \in\,]0\,;x[\,,\quad \varphi_x'(c_x) = 0.$$

Or, pour tout $t \in [0\,;x]$, on a $\varphi_x'(t) = -e^t\,(1+(x-t)) + e^t + 2(x-t)\mathrm{A} = (x-t)[-e^t + 2\mathrm{A}]$.
Par conséquent, $\varphi_x'(c_x) = 0 \iff 2\mathrm{A} = e^{c_x} \iff e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{c_x}$ en remplaçant A par sa valeur.
Ainsi,

$$\exists\, c_x \in\,]0\,;x[\,,\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{c_x}.$$

Commentaires: *Ici, le théorème de Rolle est plus indiqué que le théorème des accroissements finis.*

Partie 2

3 a Soit $x > 0$. D'après la partie 1, il existe $c_x \in\,]0\,;x[$ tel que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{c_x}$.
Dès lors, on a

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{x + \frac{x^2}{2}e^{c_x}} = \frac{x}{1 + \frac{x}{2}e^{c_x}}.$$

On a $0 \leqslant c_x \leqslant x$ donc, par encadrement, il vient $\lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0$. Par conséquent, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1 + \frac{x}{2}e^{c_x}} = \frac{0}{1 + 0 \times 1} = 0 = f(0).$$

On en déduit que la fonction f est continue en 0.

Remarque : On aurait pu retrouver ce résultat en écrivant $\frac{x^2}{e^x - 1} = x \times \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$ et utiliser les théorèmes sur les croissances comparées mais ce n'était pas dans l'esprit du sujet.

Commentaires: *Ne pas oublier de stipuler que $c_x \in\,]0\,;x[\implies \lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0$.*

(b) Soit $x > 0$. En reprenant les notations de la partie 1, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}e^{c_x}}.$$

On a déjà justifié que $\lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0$. On obtient ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\frac{x}{2}e^{c_x}} = \frac{1}{1+0\times 1} = 1.$$

Par conséquent, la fonction f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 1$.

Commentaires: *La quantité c_x n'a d'intérêt que dans un voisinage de 0 où elle tend vers 0. Partout ailleurs, elle est inutile voire encombrante et il vaut mieux l'éviter.*

(c) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables de dénominateur ne s'annulant pas sur $]0\,;+\infty[$.
De plus, on vient de prouver que f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $x > 0$, on a aussi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2} = 2\frac{x}{e^x-1} - \left(\frac{x}{(e^x-1)}\right)^2 e^x \\ &= \frac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2}. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que f, f' est également continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x-1} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 2\times 1 - 1^2 \times 1 = 1 = f'(0)$.
La fonction f' est donc continue en 0.
Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : On pouvait également, en citant correctement toutes les hypothèses, utiliser le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

4 (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x.$$

D'où $g'(x) \geqslant 0 \iff (1-x)e^x \geqslant 0 \iff 1-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$.
De plus, $g(0) = 0$, $g(1) = e-2 \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
On résume tout ceci dans le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$e-2>0$	$\searrow$	$-\infty$

(b) On a $f'(0) = 1 \neq 0$ et pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{x[(2-x)e^x-2]}{(e^x-1)^2} = \frac{xg(x)}{(e^x-1)^2}.$$

Ainsi, pour $x > 0$, $f'(x) = 0 \iff g(x) = 0$.
D'après la question précédente,

- sur $]0\,;1]$, g ne s'annule pas car g est strictement croissante sur $[0\,;1[$ avec $g(0)=0$.
- Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on applique le théorème de la bijection : g est continue et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc tout élément de $g\big([1\,;+\infty[\big) =]-\infty\,;e-2]$ possède un unique antécédent dans $[1\,;+\infty[$ par la fonction g.

  En particulier, l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution α dans $[1\,;+\infty[$ (donc dans $]0\,;+\infty[$).

Comme $g(1)=e-2>0$ et $g(2)=-2<0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que cette unique solution α vérifie $\alpha \in\,]1\,;2[$.

Par conséquent, la fonction f' s'annule en un unique réel $\alpha \in\,]1\,;2[$.

c
- Pour $x>0$,

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \frac{xg(x)}{(e^x-1)^2} \geqslant 0 \iff g(x) \geqslant 0.$$

  En complétant le tableau de variation de g, on obtient :

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
g	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	

  On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
- Dans un voisinage de $+\infty$ (en particulier $x \neq 0$), on a

$$\frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2}{e^x}\,\frac{1}{1-e^{-x}}.$$

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ (croissances comparées), on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

  En particulier, l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

On résume toutes ces informations dans le tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

La valeur de $f(\alpha)$ sera calculée ultérieurement.

5 a On a $f(0)=0$ donc 0 est un point fixe de f.

Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x^2}{e^x - 1} = x \iff \frac{x}{e^x-1} = 1 \text{ car } x \neq 0, \\ &\iff x = e^x - 1 \iff x = x + \frac{x^2}{2}e^{c_x} \text{ en utilisant la partie 1,} \\ &\iff e^{c_x} = 0 \text{ ce qui est impossible.} \end{aligned}$$

Le réel $x = 0$ est l'unique solution à l'équation $f(x) = x$, *i.e.* le seul point fixe de f.

Commentaires: *Sans invoquer un argument de convexité de la forme $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout x ou « l'exponentielle est au-dessus de ses tangentes » il est impossible de justifier l'unicité du point fixe. Comme ces notions ne sont pas expressément au programme même si je pense qu'aucun correcteur ne vous blâmerez, il valait mieux, dans le doute, utiliser les résultats de la partie 1.*

(b) Comme $\alpha \in \,]1\,;2[$, d'après (b) on a $\alpha \neq 0$ et

$$f'(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) = 0 \iff (2-\alpha)e^\alpha = 2 \iff e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha} \; (1 < \alpha < 2).$$

D'où,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha^2}{\dfrac{2}{2-\alpha} - 1} = \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{2-(2-\alpha)} = \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha} \\ &= \alpha(2-\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit $f(\alpha) - \alpha = \alpha(1-\alpha) < 0$ car $\alpha > 1$.
Ainsi, on a bien $f(\alpha) < \alpha$.

(c) D'après l'étude précédente, f atteint son maximum en $\alpha \in \,]1\,;2[$ *i.e.*

$$f\big([0\,;2]\big) \subset [0\,; f(\alpha)] \subset [0\,;\alpha] \subset [0\,;2]\,.$$

L'intervalle $[0\,;2]$ est donc stable par f.

Partie 3

6. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0\,;2]$.
   - *(i)* On a bien $u_0 = 2 \in [0\,;2]$.
   - *(ii)* On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_n \in [0\,;2]$. D'après 5.(c), on a alors $f(u_n) \in [0\,;2] \iff u_{n+1} = f(u_n) \in [0\,;2]$.
   - *(iii)* Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \in [0\,;2]$.

7. Soit $x > 0$. En reprenant les notations de la partie 1, on a

$$f(x) - x = \frac{x^2}{e^x-1} - x = x\frac{x - (e^x-1)}{e^x - 1} = x\frac{-\frac{x^2}{2}e^{c_x}}{e^x-1} = -\frac{x^3 e^{c_x}}{2(e^x-1)} \leqslant 0.$$

Pour $x = 0$, on a également $f(0) = 0 \iff f(0) - 0 \leqslant 0$ donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leqslant x.$$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$ *i.e.* la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

8 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 d'après la question 6 donc convergente. On note ℓ sa limite.

(i) $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

(ii) Par passage des inégalités de 6 à la limite, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ entraîne que $0 \leqslant \ell \leqslant 2$.

(iii) Par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0\,;2]$, on a aussi :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

(iv) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un point fixe de f.
D'après 5.a, le seul point fixe de f est 0.
Donc $\ell = 0$.

En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.