Problème 2 :

Soit A une matrice fixée de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ l'ensemble des matrices commutant avec A :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{A}} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}.$$

Partie 1 Généralités

1. (a) Montrer que si $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ alors $\lambda_1 \mathrm{M}_1 + \lambda_2 \mathrm{M}_2 \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}$.
   (b) Montrer que I_2 (la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$) et A appartiennent à $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$.

2. (a) Montrer que si $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}^2$ alors $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}$.
   (b) Montrer que si M est une matrice inversible de $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ alors M^{-1} appartient à $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$.

Partie 2 Étude d'un cas particulier

On pose maintenant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Calculer $\mathrm{AM} - \mathrm{MA}$.

4. En déduire que $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ si et seulement si $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$.

5. Montrer, par double inclusion, que $\mathcal{C}_{\mathrm{A}} = \left\{\lambda \mathrm{I}_2 + \mu \mathrm{A} \ \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Partie 3 Calcul des puissances d'une matrice

La matrice A désigne toujours celle de la partie 2.

6. Déterminer A^k pour tout entier naturel k **non nul**.

7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathrm{N} = x\mathrm{I}_2 + y\mathrm{A}$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{N}^n = x^n \mathrm{I}_2 + \Big[(x+y)^n - x^n\Big]\mathrm{A}.$$

8. Déterminer les matrices N de $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ telles que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{I}_2$.

Dérivabilité - Matrices - Suites

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Il est demandé d'encadrer les résultats des calculs et de numéroter les copies. ***Une attention toute particulière devra être portée sur l'énoncé et le nom des théorèmes utilisés. Toute affirmation, même correcte, sans justification sera survolée de la même manière et oubliée.***

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation des calculatrices et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur la copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre

Problème 1 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathrm{I} = [a, b]$.

On suppose que f' est strictement négative sur I, que f'' est positive sur I et que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Partie 1 Description de la méthode de Newton

1. Montrer qu'il existe un unique réel $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = 0$.

2. Soit u un réel de I.
   Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

Soit g la fonction définie sur I par

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in [a, c]$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad x_{n+1} = g(x_n).$$

3. La figure jointe en annexe correspond à la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f correspondant à la situation étudiée.
   Placer les termes x_1, x_2 et x_3 sur l'axe des abscisses de ce repère en faisant apparaître les traits de construction.

Partie 2 Convergence de la méthode

La fonction g et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles introduites dans la **partie 1**.

4. Justifier que g est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

5 Dresser le tableau de variation de g sur I.

6 (a) En déduire que $g([a,c]) \subset [a,c]$.
(b) Établir que $x_n \in [a,c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7 (a) Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
(b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

8 Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$.

Partie 3 Vitesse de convergence

La fonction g et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles introduites dans la **partie 1**.

9 (Préliminaire) On suppose qu'une fonction $\mathrm{F} : [\mathrm{A},\mathrm{B}] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ et que F' est dérivable sur $]\mathrm{A},\mathrm{B}[$.
On introduit la fonction φ définie sur $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ par

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x) + (\mathrm{B}-x)\mathrm{F}'(x) + \frac{(\mathrm{B}-x)^2}{2}\mathrm{K},$$

où K est une constante réelle.
(a) Montrer que l'on peut choisir K de telle sorte que $\varphi(\mathrm{A}) = \varphi(\mathrm{B})$.
(b) En déduire qu'il existe $\mathrm{C} \in]\mathrm{A},\mathrm{B}[$ tel que

$$\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \mathrm{F}(\mathrm{A}) + (\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{F}'(\mathrm{A}) + \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{A})^2}{2}\mathrm{F}''(\mathrm{C}).$$

10 Soit $x \in [a,c]$. Prouver qu'il existe c_x dans $[x,c]$ tel que

$$cf'(x) + f(x) - xf'(x) + \frac{(c-x)^2}{2}f''(c_x) = 0.$$

11 (a) Justifier que la fonction $|f''|$ est majorée sur $[a,b]$, *i.e.*

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [a,b]\quad |f''(x)| \leqslant \mathrm{M}.$$

(b) Prouver qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, on ait $|f'(x)| \geqslant m$.

12 En déduire que, pour tout $x \in [a,c]$, on a

$$|g(x) - c| \leqslant q|x-c|^2 \quad \text{où l'on a posé } q = \frac{\mathrm{M}}{2m}.$$

13 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n - c| \leqslant \dfrac{1}{q}\Big(q|x_0 - c|\Big)^{2^n}$.
(b) Quel résultat retrouve-t-on si $q|x_0 - c| < 1$?

Partie 4 Cas complexe

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On s'intéresse à la suite complexe définie par récurrence par

$$z_0 \in \mathbb{C},\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad z_{n+1} = z_n - \frac{\mathrm{P}(z_n)}{\mathrm{P}'(z_n)}.$$

14 En supposant que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie, montrer que si elle converge vers un certain $\ell \in \mathbb{C}$ alors ℓ est une racine de P.

Dans toute la suite, on suppose que P est un polynôme complexe unitaire de degré 2 à racines distinctes. On note α et β ses racines de telle sorte que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta) \quad \text{avec } \alpha \neq \beta.$$

15 Que dire de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $z_0 = \alpha$? $z_0 = \beta$? $z_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$?
On suppose désormais que $z_0 \neq \alpha$, $z_0 \neq \beta$ et $z_0 \neq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

16 Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{z_{n+1}-\alpha}{z_{n+1}-\beta} = \left(\dfrac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}\right)^2$.

17 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta} = \left(\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^{2^n}.$$

18 En déduire une expression de z_n dépendant de n, α, β et $q = \dfrac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}$.

19 Prouver que :
— Si $|z_0-\alpha| < |z_0-\beta|$ alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
— Si $|z_0-\alpha| > |z_0-\beta|$ alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.
— Si $|z_0-\alpha| = |z_0-\beta|$ et que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

On note H_α (resp. H_β) l'ensemble des complexes z_0 tel que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α (resp. vers β). Les ensembles H_α et H_β sont appelés bassins d'attraction des racines α et β.

20 La figure jointe en annexe représente le plan complexe sur lequel sont placés les complexes $\alpha = -2+i$ et $\beta = 2+3i$.
Représenter les ensembles H_α et H_β et l'ensemble des points z_0 pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

21 La figure en annexe représente les bassins d'attraction des racines du polynôme X^3-1. Déterminer les racines de X^3-1 et préciser leur bassin sur la figure.