Dérivabilité - Matrices - Suites

Commentaires: *Trois énormes et répétées erreurs dans ce devoir qui sont rédhibitoires à ce moment de l'année et témoignent du désintérêt de certains. Continuez à prendre cela à la légère et je ferai de même avec votre passage en deuxième année !*

1. *Cessez d'écrire qu'un quotient de fonctions dérivables est dérivable ou changez d'orientation !*
2. *Cessez de diviser sans vous demander si votre diviseur est non nul. Cela finit par devenir insultant.*
3. *Cessez d'invoquer des théorèmes sans vérifier leurs hypothèses (et que celles-là). Bien sûr, cela nécessite de les apprendre donc de travailler, je sais bien ! Affirmer n'importe quoi n'a jamais été l'apanage des sciences mais de la croyance. Les uns ont brulé les autres. Choisissez votre camp !*

Vous êtes dorénavant plus que prévenus. À partir du prochain devoir, j'arrête la correction à la première de ces erreurs.

Problème 1 :

Partie 1 Description de la méthode de Newton

1. La fonction f est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ avec $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.

   Comme f' est strictement négative sur I, la fonction f est strictement décroissante sur I donc ne peut s'annuler qu'au plus une fois.

   Par conséquent, il existe un unique $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = 0$.

   Commentaires: *Les seuls mots qu'un correcteur cherche sont « intervalle », « continue » et « strictement ».*

2. Pour $u \in \mathrm{I}$, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u est

$$y = f'(u)(x-u) + f(u).$$

   Les coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses vérifient

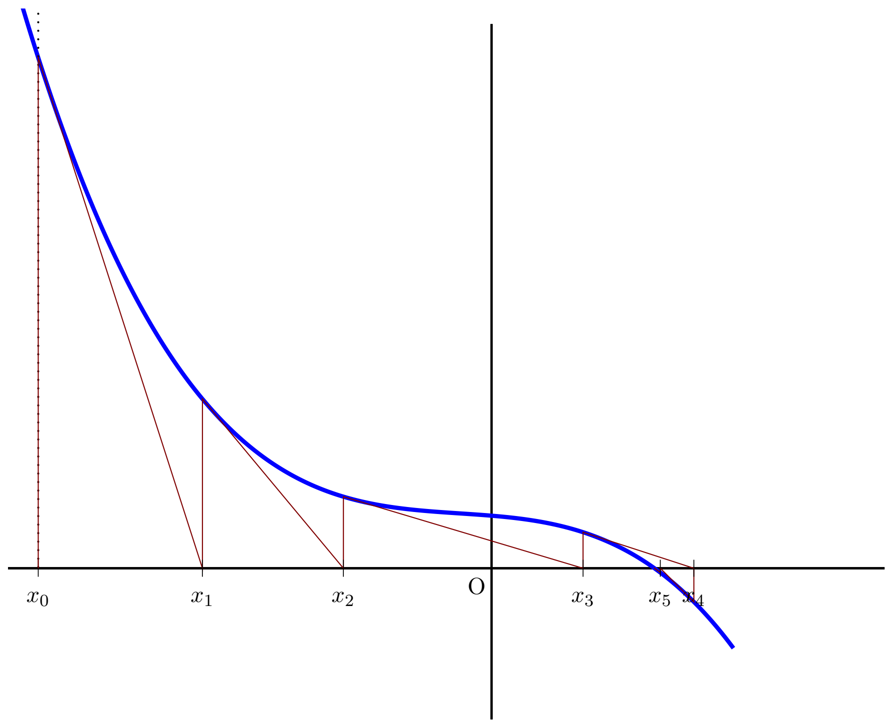
$$\begin{cases} \beta = f'(u)(\alpha - u) + f(u) \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u - \dfrac{f(u)}{f'(u)} \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

   Commentaires:

— *Une droite coupe une autre droite. Une droite est un ensemble de points dont les coordonnées sont solutions d'une équation. Une droite n'est pas égale à zéro ou autres bêtises du genre. En ne faisant pas preuve de rigueur sur ce point, vous renvoyez une TRÈS mauvaise image et le correcteur sera enclin à faire preuve de la même négligence envers votre copie. Vous êtes prévenus.*

— *Dans la même idée quand on dit « équation de droite » tout est dans le titre !...* $f'(a) + (x-a)f(a)$ *n'est pas une équation. Tip : Il n'a pas de signe « = ».*

3 On suivant le principe de construction énoncé, on obtient :



Commentaires: *Graphiquement, que se passe-t-il si f' s'annule sur notre intervalle ?*

Partie 2 Convergence de la méthode

4 La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, les fonctions f et f' sont dérivables et on sait que f' ne s'annule pas. En tant que quotient de dénominateur ne s'annulant pas sur I et somme de fonctions dérivables sur I, la fonction g est dérivable sur I.

De plus, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Commentaires:

— *Les seules choses à justifier étaient la dérivabilité de f' et qu'elle ne s'annulait pas. Tout cela donné dans l'énoncé.*

— *Bien sûr, je ne peux rien pour ceux qui font une erreur de signes dans le calcul de g'.*

5 L'énoncé précise que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f''(x) \geqslant 0$ donc

$$g'(x) \geqslant 0 \iff \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant 0 \underset{f \text{ décroissante}}{\iff} x \leqslant c$$

car f est strictement décroissante et s'annule en c. Par ailleurs, $f(c) = 0$ entraîne $g(c) = c$.

On obtient le tableau de variation ci-après :

x	a		c		b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$g(a)$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$g(b)$

6 ⓐ Comme $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$ d'où $-\dfrac{f(a)}{f'(a)} > 0$ et $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} > a$.

De plus, comme g est croissante sur $[a\,;c]$ alors

$$\forall\, x \in [a\,;c]\,,\ a \leqslant g(a) \leqslant g(x) \leqslant g(c) = c \iff g([a\,;c]) \subset [a\,;c]\,.$$

Commentaires:

— *Pour montrer que $g([a\,;c]) \subset [a\,;c]$, seule la conservation de l'ordre est nécessaire et non la continuité mais on ne peut plus alors dire que $g([a\,;c])$ est un intervalle.*

— *Même en usant de la continuité de g, le théorème des bornes atteintes ne peut pas vous aider ici. Il faudra de toute manière montrer que* min *et* max *sont dans l'intervalle $[a\,;c]$.*

ⓑ Montrons, par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a\,;c]$.

◇ Par construction, on a bien $x_0 \in [a\,;c]$.

◇ Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n \in [a\,;c]$.

D'après la question précédente, $x_{n+1} = g(x_n) \in [a\,;c]$ et l'hérédité.

◇ Étant initialisée à partir de $n = 0$, et héréditaire la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a\,;c]$.

7 ⓐ Sur $[a\,;c]$, la fonction g est croissante donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Commentaires:

— *Non, non et non ! La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas la même monotonie que g.*

— *L'énoncé demande juste la monotonie dont inutile de s'embêter à prouver la croissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

— *La continuité de g n'a rien à voir là-dedans. Seule la conservation de l'ordre compte !*

ⓑ La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et incluse dans l'intervalle borné $[a\,;c]$. D'après le théorème de limite monotone, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $a \leqslant \ell \leqslant c$.

Commentaires:

— *Encore une fois, les seules qu'un correcteur cherche sont « monotone » et « bornée ».*

— *Pour les mêmes raisons, tant qu'on ne demande de trouver la limite inutile d'être trop précis sur celle-ci.*

8 Comme g est continue sur $[a\,;c]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers un point fixe de g.

Or, $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)} \underset{f'(\ell)\neq 0}{\iff} f(\ell) = 0 \iff \ell = c$.

Comme c est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c.$$

Commentaires:

— *Sans continuité point de points fixes donc… point de points sans ce point justifié. Point !*

— *Il est aussi nécessaire de justifier que c est le seul point fixe de g. En général, vous avez oublié ce « détail ».*

— *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de point fixe et seulement une limite qui est le point fixe de g.*

— *Ici, à avoir joué avec le feu aux deux questions précédentes, on aurait pu être embêté si la fonction g avait eu plus qu'un point fixe dans $[a\,;c]$. Ça passe !*

Partie 3 Vitesse de convergence

9 (a) On a $\varphi(B) = F(B)$ et $\varphi(A) = F(A) + (B-A)F'(A) + \dfrac{(B-A)^2}{2}K$.

Dès lors, si $A = B$, tout K convient sinon,

$$\begin{aligned}\varphi(A) = \varphi(B) &\iff F(A) + (B-A)F'(A) + \frac{(B-A)^2}{2}K = F(B) \\ &\underset{A\neq B}{\iff} K = \frac{2}{(B-A)^2}\Big(F(B) - F(A) - (B-A)F'(A)\Big).\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on choisit cette valeur de K de telle sorte que $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Commentaires: *Ici, nul besoin de propriétés sur φ définie par l'énoncé. On regarde juste si on sait résoudre une équation de bébés. Conclusion : vous ne savez toujours pas. Les mathématiques vous échappent. Bien peu sont ceux qui pensent... à spécifier $A \neq B$ avant de diviser par $B-A$. Continuez et vous resterez au collège ! Au second semestre, c'est très pénible. Même chose pour les dérivées de quotients. N'attendez aucune mansuétude du correcteur tant que vous ne faites aucun effort.*

(b) La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et telle que sa dérivée soit dérivable donc φ est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$ d'après les théorèmes sur les sommes de fonctions continues et dérivables. Elle vérifie, de plus, $\varphi(A) = \varphi(B)$.

D'après le théorème de Rolle,

$$\exists C \in \,]a\,;b[\,,\ \varphi'(C) = 0.$$

Or, $\forall\, x \in \,]a\,;b[$, $\varphi'(x) = (B-x)F''(x) - (B-x)K$.

Donc $\varphi'(C) = 0 \iff (B-C)F''(C) = (B-C)K \underset{C\neq B}{\iff} F''(C) = K$.

En reprenant la valeur de K choisie, on obtient :

$$\exists C \in \,]a\,;b[\,,\ F(B) = F(A) + (B-A)F'(A) + \frac{(B-A)^2}{2}F''(C).$$

Commentaires: *Sans préciser que $B - C \neq 0$, il est tout à fait faux et pire de déduire que $F''(C) = K$ de l'équation $(B-C)F''(C) = (B-C)K$.*

10 Soit $x \in [a\,;c]$. La fonction f vérifie toutes les hypothèses de la question précédente donc, il existe $c_x \in]x, c[$ tel que :

$$\begin{aligned}\underbrace{f(c)}_{=0} &= f(x) + (c-x)f'(x) + \frac{(c-x)^2}{2!}f''(c_x). \\ 0 &= cf'(x) + f(x) - xf'(x) + \frac{(c-x)^2}{2}f''(c_x).\end{aligned}$$

Commentaires: *Il était tout à fait inutile de tout refaire. Préciser que votre fonction f vérifie les mêmes propriétés que F sur l'intervalle $[x\,;c]$ suffit.*

11 (a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$, la fonction f'' est continue sur le segment $[a\,;b]$ donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes.

Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in [a\,;b] \quad |f''(x)| \leqslant M.$$

(b) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$, la fonction f' est continue sur le segment $[a\,;b]$. D'après le théorème des bornes ateintes, elle y est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in [a\,;b]^2$ tel que :

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,,\ f'(\alpha_1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(\alpha_2).$$

Comme f' est strictement négative, $f'(\alpha_2) < 0$. Alors $m = |f'(\alpha_2)| > 0$ et,

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,,\ |f'(x)| \geqslant m.$$

12 Soit $x \in [a\,;c]$.

$$\begin{aligned}
|g(x)-c| &= \left|x - \frac{f(x)}{f'(x)} - c\right| = \left|\frac{xf'(x)-f(x)-cf(x)}{f'(x)}\right| \\
&= \left|\frac{(c-x)^2 f''(c_x)}{2f'(x)}\right|, \text{ grâce à la question } \boxed{10}, \\
&= \frac{|x-c|^2}{2}\frac{|f''(c_x)|}{|f'(x)|} \leqslant \frac{\mathrm{M}|x-c|^2}{2m} \text{ grâce à la question } \boxed{11} \\
&= q|x-c|^2, \text{ en posant } q = \frac{\mathrm{M}}{2m}.
\end{aligned}$$

13 (a) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - c| \leqslant \frac{1}{q}\Big(q|x_0-c|\Big)^{2^n}$.

- ◇ Pour $n = 0$, $\frac{1}{q}\Big(q|x_0-c|\Big)^{2^0} = \frac{1}{q}(q|x_0-c|) = |x_0-c| \geqslant |x_0-c|$: l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- ◇ Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, tel que l'on ait $|x_n - c| \leqslant \frac{1}{q}\Big(q|x_0-c|\Big)^{2^n}$.

  Dès lors, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}-c| = |g(x_n)-c| &\leqslant q|x_n-c|^2 \quad \text{grâce à la question } \boxed{12}, \\
&\leqslant q\left(\frac{1}{q}(q|x_0-c|)^{2^n}\right)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence}, \\
&\leqslant \frac{q}{q^2}\Big(q|x_0-c|\Big)^{2^n\times 2} = \frac{1}{q}\Big(q|x_0-c|\Big)^{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

  ce qui assure l'hérédité et achève la récurrence.

(b) Si $q|x_0-c| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}(q|x_0-c|)^{2^n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}|x_n-c| = 0$.

On retrouve le fait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

Partie 4 Cas complexe

14 On suppose que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{C}$. La bonne définition $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa convergence vers ℓ présuppose que, dans un voisinage de ℓ, P' ne s'annule pas *i.e.* que la fonction (à valeurs complexes) $g : z \longmapsto z - \frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{P}'(z)}$ est continue sur ce voisinage.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc nécessairement vers un point fixe de g *i.e.* une solution de l'équation :

$$z = z - \frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{P}'(z)} \iff 0 = \frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{P}'(z)} \underset{\mathrm{P}'(z)\neq 0}{\iff} \mathrm{P}(z) = 0 \iff \ell \text{ est une racine de } \mathrm{P}.$$

Commentaires: *Pour que l'on puise espérer qu'une suite récurrente converge vers un des points fixes de la fonction la définissant, il est nécessaire que celle-ci soit continue sinon il peut se passer un peu n'importe quoi.*

15
- ◇ Si $z_0 = \alpha$ alors $\mathrm{P}(z_0) = 0$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à α. Elle converge vers α.
- ◇ Si $z_0 = \beta$ alors $\mathrm{P}(z_0) = 0\ldots$ La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à β. Elle converge vers β.
- ◇ Si $z_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ alors z_0 est une racine de $\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X} - (\alpha+\beta)$. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie.

16 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} z_{n+1}-\alpha = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)} - \alpha &= z_n - \alpha - \frac{(z_n-\alpha)(z_n-\beta)}{2z_n-\alpha-\beta} \\ &= (z_n-\alpha)\left(1-\frac{z_n-\beta}{2z_n-\alpha-\beta}\right) \\ &= (z_n-\alpha)\frac{2z_n-\alpha-\beta-(z_n-\beta)}{2z_n-\alpha-\beta} \\ &= \frac{(z_n-\alpha)^2}{2z_n-\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

On montre de même que $z_{n+1}-\beta = \dfrac{(z_n-\beta)^2}{2z_n-\alpha-\beta}$ non nul par hypothèse.

Il s'ensuit,

$$\frac{z_{n+1}-\alpha}{z_{n+1}-\beta} = \frac{\dfrac{(z_n-\alpha)^2}{2z_n-\alpha-\beta}}{\dfrac{(z_n-\beta)^2}{2z_n-\alpha-\beta}} = \left(\frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}\right)^2.$$

Commentaires: *Ces relations prouvent, au passage, que si $z_0 \neq \alpha$ (resp. $z_0 \neq \beta$) alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $z_n \neq \alpha$ (resp. $z_n \neq \beta$).*

17 On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{z_n-\alpha}{z_n-\beta} = \left(\dfrac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^{2^n}$.

- Pour $n = 0$, on a bien $\dfrac{z_0-\alpha}{z_0-\beta} = \left(\dfrac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^1 = \left(\dfrac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^{2^0}$.
- On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $\dfrac{z_n-\alpha}{z_n-\beta} = \left(\dfrac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^{2^n}$.

  On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{z_{n+1}-\alpha}{z_{n+1}-\beta} &= \left(\frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}\right)^2 \quad \text{grâce à la question } \boxed{16}, \\ &= \left(\left(\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^{2^n}\right)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= \left(\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^{2^n\times 2} = \left(\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right)^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

  ce qui assure l'hérédité et achève la récurrence.

18 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta} = q^{2^n} \iff z_n-\alpha = q^{2^n}(z_n-\beta) \iff z_n(1-q^{2^n}) = \alpha-\beta q^{2^n}.$$

Or, $|z_0-\alpha| \neq |z_0-\beta|$ entraîne $|q| \neq 1$ puis $q^{2^n} \neq 1$.

Par conséquent, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad z_n = \frac{\alpha-\beta q^{2^n}}{1-q^{2^n}}.$$

Commentaires: *On voit apparaître le fait que si q est une racine 2^n-ième de l'unité alors $1-q^{2^n} = 0$ et bien que les termes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ existent, le terme z_n n'existe pas. Ici, l'entier n désigne le plus petit entier positif p tel que q est une racine 2^p-ième de l'unité*

19 On peut se servir, au choix, des deux questions précédentes :

— Si $|z_0 - \alpha| < |z_0 - \beta|$ alors $|q| < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Ainsi, la sous-suite des termes de rang une puissance de 2 vérifie également $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{2^n} = 0$ puis

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha - \beta q^{2^n}}{1 - q^{2^n}} = \alpha \iff (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.$$

— Si $|z_0 - \alpha| > |z_0 - \beta|$ alors $\left|\frac{1}{q}\right| < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{q^{2^n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^{2^n} = 0$.

On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha - \beta q^{2^n}}{1 - q^{2^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\alpha}{q^{2^n}} - \beta}{\frac{1}{q^{2^n}} - 1} = \beta \iff (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \beta.$$

— Si $|z_0 - \alpha| = |z_0 - \beta|$ et que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}\right| = 1 \iff |z_n - \alpha| = |z_n - \beta|.$$

Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe ℓ, alors $|\ell - \alpha| = |\ell - \beta|$.

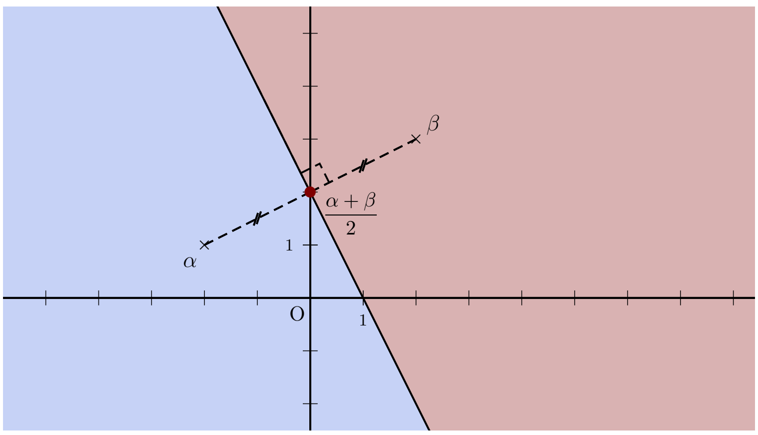
Or, $\alpha \neq \beta$, entraîne $\ell \neq \alpha$ et $\ell \neq \beta$ ce qui est impossible d'après 14.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

20 Dans la figure ci-après,

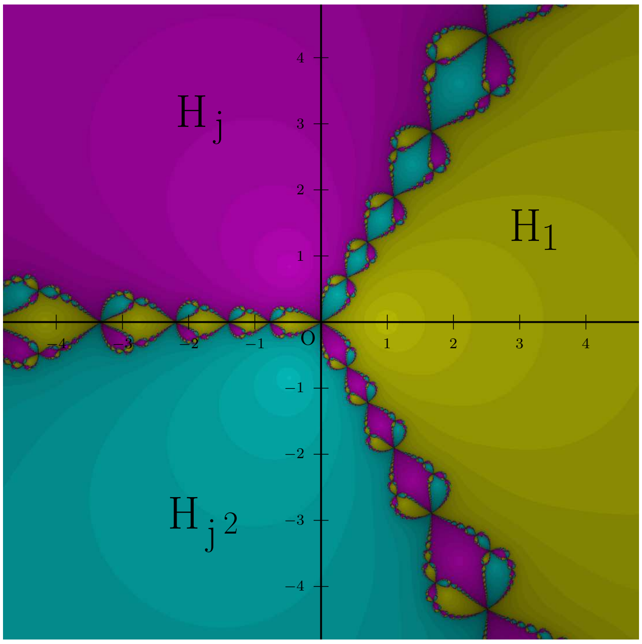
- le bassin d'attraction H_α est représenté en bleu, celui de H_β est représenté en rouge.
- Le point rouge correspond à $z_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ pour lequel la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie.
- La droite noire séparant les deux bassins $\left(\text{privée de } \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ représente l'ensemble des points z_0 pour lesquels soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas correctement définie.

  D'après 19, c'est l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z - \alpha| = |z - \beta|$ *i.e.* les points de la médiatrice de $[\alpha\beta]$ hormis le milieu $\frac{\alpha + \beta}{2}$ de $[\alpha\beta]$.



21 Les racines de $X^3 - 1$ sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

En généralisant le résultat de 15, si z_0 est l'une des racines de $X^3 - 1$ alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à cette racine. Pour identifier les bassins d'attraction, il suffit donc d'identifier la couleur de la zone du plan complexe dans laquelle se trouve chaque racine. Ainsi, chaque bassin est celui qui contient sa racine.



Commentaires: *Au minimum, un élève digne de sa PTSI doit connaître sans calcul les racines des polynômes X^2-1, X^2+1, X^3-1 et X^4-1 et les placer sur un cercle. Au minimum !*

Bien sûr, ceux qui auront daigné apprendre leur cours connaîtront aussi les racines des polynômes X^n-1.

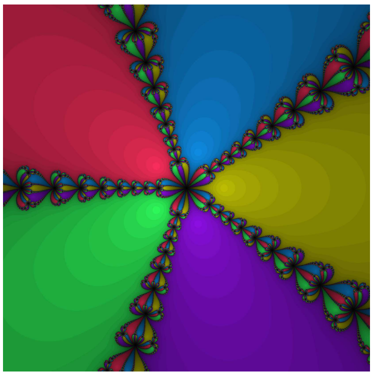


FIGURE XVI.1 – Bassins d'attraction pour les racines de $P = X^5 - 1$.

Problème 2 :

Partie 1 Généralités

1 (a) Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{C}_A^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Par hypothèse, on a $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$ donc, par linéarité du produit matriciel, on a :

$$A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \lambda_1 AM_1 + \lambda_2 AM_2 = \lambda_1 M_1 A + \lambda_2 M_2 A = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)A.$$

Autrement dit, on a $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in \mathcal{C}_A$.

(b) Il est relativement clair que $I_2 A = A = AI_2$ et $AA = A^2 = AA$ donc I_2 et A appartiennent à $\mathcal{C}_A$.

2 (a) Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{C}_A^2$, ie $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$. On peut écrire :

$$A(M_1M_2) = (AM_1)M_2 = (M_1A)M_2 = M_1(AM_2) = M_1(M_2A) = (M_1M_2)A.$$

Donc, $M_1M_2 \in \mathcal{C}_A$.

b Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}(\mathbb{R})$ inversible. Alors,

$$\mathrm{M}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{AI} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{MM}^{-1}) = \mathrm{M}^{-1}(\mathrm{AM})\mathrm{M}^{-1} \underset{\mathrm{M}\in\mathcal{C}_{\mathrm{A}}}{=} \mathrm{M}^{-1}\mathrm{MAM}^{-1} = \mathrm{IAM}^{-1} = \mathrm{AM}^{-1}.$$

Donc, $\mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}$.

Partie 2 Étude d'un cas particulier

3

$$\begin{aligned}
\mathrm{AM} - \mathrm{MA} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c & d-a-b \\ c & -c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}} \iff \mathrm{AM} = \mathrm{MA} &\iff \mathrm{AM} - \mathrm{MA} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} c & d-a-b \\ c & -c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} c = 0 \\ d-a-b = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} c = 0 \\ d = a+b \end{cases} \iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5 On sait que I_2 et A appartiennent à $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ (question b partie 1) et que $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ est stable par combinaison linéaire (question a partie 1) donc, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda\mathrm{I}_2 + \mu\mathrm{A} \in \mathcal{C}_{\mathrm{A}}$.

Donc $\left\{\lambda\mathrm{I}_2 + \mu\mathrm{A} \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{A}}$.

Réciproquement, d'après la question 4, la matrice A s'écrit sous la forme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{A} \in \left\{\lambda\mathrm{I}_2 + \mu\mathrm{A} \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Donc, $\mathcal{C}_{\mathrm{A}} \subset \left\{\lambda\mathrm{I}_2 + \mu\mathrm{A} \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et, par double inclusion,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{A}} = \left\{\lambda\mathrm{I}_2 + \mu\mathrm{A} \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Partie 3 Calcul des puissances d'une matrice

6 Après calculs, $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}^k = \mathrm{A}$ et pour $k = 0$, on a $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_2$.

7 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{N} = x\mathrm{I}_2 + y\mathrm{A}$.

Comme I_2 et A commutent alors $(x\mathrm{I}_2)(y\mathrm{A}) = xy\mathrm{A} = (y\mathrm{A})(x\mathrm{I}_2)$ de telle sorte que l'on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}^n = (y\mathrm{A} + x\mathrm{I}_2)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y\mathrm{A})^k (x\mathrm{I}_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} \mathrm{I}_2 \mathrm{A}^k \\
&= \binom{n}{0} x^n \mathrm{A}^0 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} \mathrm{A}\right] = x^n \mathrm{I}_2 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k}\right] \mathrm{A} \\
&= x^n \mathrm{I}_2 + \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} - x^n\right] \mathrm{A} \\
&= x^n \mathrm{I}_2 + \left[(y+x)^n - x^n\right] \mathrm{A}.
\end{aligned}$$

Commentaires: *Pour ceux qui se sont essayé au binôme de Newton, une seule chose à dire « les matrices commutent » sinon passer votre chemin.*

8 Soit N de $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ donc d'après la **partie 2**, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{N} = x\mathrm{I}_2 + y\mathrm{A}$.

Grâce à la question précédente, on a

$$\mathrm{N}^2 = x^2\mathrm{I}_2 + \left[(x+y)^2 - x^2\right]\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x^2 & (x+y)^2 - x^2 \\ 0 & (x+y)^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}^2 = \mathrm{I}_2 &\iff \begin{pmatrix} x^2 & (x+y)^2 - x^2 \\ 0 & (x+y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ (x+y)^2 - x^2 = 0 \\ (x+y)^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-1)(x+1) = 0 \\ (2x+y)y = 0 \end{cases} \qquad (\text{car } \mathrm{L}_3 = \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1) \\
&\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, les matrices N de $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ telles que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{I}_2$ sont les matrices

$$\mathrm{I}_2, \quad -\mathrm{I}_2, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$