Suites

I. Théorème de Cesàro

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. On lui associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ v_n = \frac{1}{n}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

Le théorème de Cesàro affirme que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

On se propose de démontrer ce théorème dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et d'étudier sa réciproque.

1. On suppose dans un premier temps que $\ell = 0$.
   a. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'on puisse fixer un entier $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^\star$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   b. Démontrer que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $|v_n| \leqslant \dfrac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{\mathrm{N}-1}|}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   c. En déduire qu'il existe un entier N' tel que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant \mathrm{N}' \Rightarrow |v_n| \leqslant \varepsilon$. Conclure.
2. On suppose désormais que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u'_n = u_n - \ell \quad \text{et} \quad v'_n = \frac{1}{n}\left(u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_n\right).$$
   a. Exprimer v'_n en fonction de v_n.
   b. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
3. On étudie la réciproque du théorème de Cesàro :
   a. Calculer $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$.
   b. La réciproque du théorème de Cesàro est-elle vraie ?

II. Lemme de l'escalier

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$.
   Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$ (**Lemme de l'escalier**) . *On pourra appliquer le théorème de Cesàro.*
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs.
   Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge aussi vers a.
3. En déduire la limite des suites définies par :
   a. $a_n = \dbinom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$ b. $b_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ c. $c_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$