Suites

I. Théorème de Cesàro

1 (a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, par définition, sachant que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^\star$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant \mathrm{N} \implies |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k|$ d'après l'inégalité triangulaire.

D'où, $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $|v_n| \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1}|u_k| + \sum_{k=\mathrm{N}}^{n}|u_k|\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=\mathrm{N}}^{n}|u_k|$.

On peut majorer la deuxième somme, puisque par hypothèse, $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Et, $\sum_{k=\mathrm{N}}^{n}|u_k| \leqslant \underbrace{(n-\mathrm{N}+1)}_{\geqslant 0}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant n\frac{\varepsilon}{2}$ (car $\mathrm{N} \geqslant 1$) entraîne $\frac{1}{n}\sum_{k=\mathrm{N}}^{n}|u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent,

$$\forall n \geqslant \mathrm{N},\ |v_n| \leqslant \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{\mathrm{N}-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \text{(XV.1)}$$

Commentaires: *Il fallait bien lire $u_{\mathrm{N}-1}$ et non u_{n-1}. L'indice N avait pour vocation a être bloqué et fini pendant que n continuait à faire sa vie vers $+\infty$.*

(c) N est désormais fixé.

Par conséquent, la somme $\mathrm{S} = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{\mathrm{N}-1}|$ est fixée et la suite $\left(\frac{\mathrm{S}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge donc vers 0.

Il existe donc un entier $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_0$, $\left|\frac{\mathrm{S}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ n \geqslant \mathrm{N}_0 \implies \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{\mathrm{N}-1}|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \text{(XV.2)}$$

En posant $\mathrm{N}' = \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}_0)$, et en rassemblant les résultats XV.1 et XV.2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant \mathrm{N}' \implies \quad |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}' \in \mathbb{N}^\star, \forall n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant \mathrm{N}' \Rightarrow |v_n| \leqslant \varepsilon$ *i.e.* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Commentaires: *L'ingrédient principal de cette question était que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc on doit au moins voir ça clairement. Tout le reste n'est que du blabla qui ne sera pas lu de toute façon.*

2 a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u'_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} \ell\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - n\ell\right] = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell$$
$$= v_n - \ell.$$

b On a supposé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Par conséquent, la suite (u'_n) converge vers 0.

D'après la question 1., on sait que la suite (v'_n) converge aussi vers 0.

Et puisque $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = v'_n + \ell$, d'après les théorèmes sur les limites de sommes :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Commentaires:

- *Si vos notes tendent vers 20, votre moyenne aussi.*
- *Quand vous voulez appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, justifiez correctement que cette suite vérifie les conditions de la question et dites-le surtout !*

3 a

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\sin(k) = \sum_{k=0}^{n}\sin(k) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}\,\left(e^{ik}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\,\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i}\right)^k\right) = \mathrm{Im}\,\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right) \text{ car } e^{i} \neq 1$$
$$= \mathrm{Im}\,\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}} - e^{i\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{i\frac{1}{2}}\left(e^{-i\frac{1}{2}} - e^{i\frac{1}{2}}\right)}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\,\left(e^{i\frac{n}{2}}\frac{-2i\sin\frac{n+1}{2}}{-2i\sin\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\mathrm{Im}\,\left(e^{i\frac{n}{2}}\right)$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}\right).$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k)\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$

Or, $\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k) = 0.$$

Commentaires: *Pensez à dire que* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}} \neq 1$ *!!!!*

(b) Si la réciproque du théorème de Cesàro était vraie, on pourrait en déduire que la suite $\big(\sin(n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Mais on sait que cette suite diverge.

La réciproque du théorème de Cesàro est fausse.

Commentaires:

— *Le contre-exemple usuel à la réciproque du théorème de Cesàro est la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente alors que sa moyenne converge vers 0 mais c'était moins intéressant pour moi que de vous refaire calculer la somme des sinus.*

— *Pour que la réciproque soit vraie, il faut, en fait, renforcer les hypothèses sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Je vous en donne deux pour la culture seulement :*

i. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, la réciproque est vraie.

ii. Si $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la réciproque est vraie.

II. Lemme de l'escalier

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$.

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $s_n = u_n - u_{n-1}$.

Par hypothèse, on a $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc, d'après le théorème de Cesàro, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$ entraîne $\dfrac{u_n-u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Il reste juste à écrire que $\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{u_n-u_0}{n} + \dfrac{u_0}{n}$ et à remarquer que $\dfrac{u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour conclure avec les théorèmes sur les limites de sommes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = \ell. \qquad \textbf{(Lemme de l'escalier)}$$

Commentaires: *u_n désignant la hauteur d'un escalier à hauteur de marche variable, $u_{n+1}-u_n$ la hauteur de la $(n+1)^{\text{ème}}$ marche, le théorème indique que si la hauteur de marche tend vers une valeur ℓ, alors la hauteur de l'escalier est équivalente à celle d'un escalier à hauteur de marche constante égale à ℓ.*

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$.

La suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également à termes strictement positifs.

Donc, passage à la limite, sa limite a est positive ou nulle.

Commentaires: *Avant de composer par une fonction, pensez à vérifier que vous êtes dans son domaine de définition. Ici « strictement positifs ».*

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $v_n = \ln u_n$ ce qui est légitime d'après la remarque ci-dessus.

Si $a>0$: On a $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a \\ \lim\limits_{x\to a}\ln(x) = \ln(a) \text{ par continuité de } \ln \text{ en } a.\end{cases}$

Par composition des limites, $\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(a)$.

Or, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad \ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = v_{n+1}-v_n$.

D'où, $v_{n+1}-v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(a)$.

D'après le lemme de l'escalier, $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(a)$.

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad \dfrac{v_n}{n} = \dfrac{1}{n}\ln(u_n) = \ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$.

On a donc $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \ln(a) \\ \lim\limits_{x\to\ln(a)} e^x = e^{\ln(a)} = a \text{ par continuité de exp en } \ln(a). \end{cases}$

Par composition des limites, $e^{\ln(\sqrt[n]{u_n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

D'où :

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.$$

Si $a = 0$: le raisonnement est exactement le même, en remplaçant tous les $\ln(a)$ par $-\infty$.

Commentaires: *Pensez à citer la continuité de l'exponentielle avant de composer par elle sinon point de limite ou pas là où vous voudrez.*

3 (a) $a_n = \dbinom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} = \sqrt[n]{\alpha_n}$ en posant $\alpha_n = \dbinom{2n}{n}$.

Or, $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)^2}}{\dfrac{(2n)!}{n!^2}} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.

D'après la question précédente, $\sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$, i.e.

$$\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4.$$

(b) $b_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{\beta_n}$ en posant $\beta_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

Et, $\dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

D'après la question précédente, $\sqrt[n]{\beta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$, i.e.

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$$

(c) $c_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!n^{2n}}} = \sqrt[n]{\gamma_n}$ en posant $\gamma_n = \dfrac{(3n)!}{n!n^{2n}}$.

De même que précédemment,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} &= \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(3n)!}{n!n^{2n}}} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n^{2n}}{(n+1)(n+1)^{2n+2}} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{27}{e^2}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\sqrt[n]{\gamma_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{27}{e^2}$, i.e.

$$\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{27}{e^2}.$$

Index