

Suites

I. Théorème de Cesàro

- 1 a Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, par définition, sachant que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N \implies |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- b $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k|$ d'après l'inégalité triangulaire.

$$\text{D'où, } \forall n \geq N, |v_n| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \sum_{k=N}^n |u_k| \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k|.$$

On peut majorer la deuxième somme, puisque par hypothèse, $\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{Et, } \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \underbrace{(n - N + 1)}_{\geq 0} \frac{\varepsilon}{2} \leq n \frac{\varepsilon}{2} \text{ (car } N \geq 1) \text{ entraîne } \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq N, |v_n| \leq \frac{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{XV.1})$$

Commentaires: Il fallait bien lire u_{N-1} et non u_{n-1} . L'indice N avait pour vocation à être bloqué et fini pendant que n continuait à faire sa vie vers $+\infty$.

- c N est désormais fixé.

Par conséquent, la somme $S = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_{N-1}|$ est fixée et la suite $\left(\frac{S}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers 0.

Il existe donc un entier $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N_0, \left| \frac{S}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_0 \implies \frac{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{N-1}|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{XV.2})$$

En posant $N' = \max(N, N_0)$, et en rassemblant les résultats XV.1 et XV.2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N' \implies |v_n| \leq \varepsilon$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Commentaires: L'ingrédient principal de cette question était que la suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 donc on doit au moins voir ça clairement. Tout le reste n'est que du blabla qui ne sera pas lu de toute façon.

2

a

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v'_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u'_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n \ell \right] \\
 &= \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - n\ell \right] = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - \ell \\
 &= v_n - \ell.
 \end{aligned}$$

(b) On a supposé que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ . Par conséquent, la suite (u'_n) converge vers 0.

D'après la question 1., on sait que la suite (v'_n) converge aussi vers 0.

Et puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v'_n + \ell$, d'après les théorèmes sur les limites de sommes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Commentaires:

- Si vos notes tendent vers 20, votre moyenne aussi.
- Quand vous voulez appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, justifiez correctement que cette suite vérifie les conditions de la question et dites-le surtout !

3

a

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \sum_{k=1}^n \sin(k) = \sum_{k=0}^n \sin(k) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} (e^{ik}) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n (e^i)^k \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right) \text{ car } e^i \neq 1 \\
 &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i \frac{n+1}{2}} (e^{-i \frac{n+1}{2}} - e^{i \frac{n+1}{2}})}{e^{i \frac{1}{2}} (e^{-i \frac{1}{2}} - e^{i \frac{1}{2}})} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{n}{2}} \frac{-2i \sin \frac{n+1}{2}}{-2i \sin \frac{1}{2}} \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \right)} \operatorname{Im} (e^{i \frac{n}{2}}) \\
 &= \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \right)} \sin \left(\frac{n}{2} \right).
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k) \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \right)} \sin \left(\frac{n}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sin \left(\frac{1}{2} \right)}.$

Or, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{\sin \left(\frac{1}{2} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k) = 0.$$

Commentaires: Pensez à dire que $e^i \neq 1!!!!$

- b) Si la réciproque du théorème de Cesàro était vraie, on pourrait en déduire que la suite $(\sin(n))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Mais on sait que cette suite diverge.

La réciproque du théorème de Cesàro est fautive.

Commentaires:

- Le contre-exemple usuel à la réciproque du théorème de Cesàro est la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente alors que sa moyenne converge vers 0 mais c'était moins intéressant pour moi que de vous refaire calculer la somme des sinus.
- Pour que la réciproque soit vraie, il faut, en fait, renforcer les hypothèses sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Je vous en donne deux pour la culture seulement :
 - i. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, la réciproque est vraie.
 - ii. Si $u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la réciproque est vraie.

II. Lemme de l'escalier

- 1 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = u_n - u_{n-1}$.

Par hypothèse, on a $s_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ donc, d'après le théorème de Cesàro, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Or, $\sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$ entraîne $\frac{u_n - u_0}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Il reste juste à écrire que $\frac{u_n}{n} = \frac{u_n - u_0}{n} + \frac{u_0}{n}$ et à remarquer que $\frac{u_0}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ pour conclure avec les théorèmes sur les limites de sommes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell. \quad (\text{Lemme de l'escalier})$$

Commentaires: u_n désignant la hauteur d'un escalier à hauteur de marche variable, $u_{n+1} - u_n$ la hauteur de la $(n+1)^{\text{ème}}$ marche, le théorème indique que si la hauteur de marche tend vers une valeur ℓ , alors la hauteur de l'escalier est équivalente à celle d'un escalier à hauteur de marche constante égale à ℓ .

- 2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$.

La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est également à termes strictement positifs.

Donc, passage à la limite, sa limite a est positive ou nulle.

Commentaires: Avant de composer par une fonction, pensez à vérifier que vous êtes dans son domaine de définition. Ici « strictement positifs ».

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln u_n$ ce qui est légitime d'après la remarque ci-dessus.

Si $a > 0$: On a $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \\ \lim_{x \rightarrow a} \ln(x) = \ln(a) \text{ par continuité de } \ln \text{ en } a. \end{cases}$

Par composition des limites, $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(a)$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = v_{n+1} - v_n$.

D'où, $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(a)$.

D'après le lemme de l'escalier, $\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(a)$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{v_n}{n} = \frac{1}{n} \ln(u_n) = \ln(\sqrt[n]{u_n})$.

On a donc $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = \ln(a) \\ \lim_{x \rightarrow \ln(a)} e^x = e^{\ln(a)} = a \text{ par continuité de exp en } \ln(a). \end{cases}$

Par composition des limites, $e^{\ln(\sqrt[n]{u_n})} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

D'où :

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a.$$

Si $a = 0$: le raisonnement est exactement le même, en remplaçant tous les $\ln(a)$ par $-\infty$.

Commentaires: Pensez à citer la continuité de l'exponentielle avant de composer par elle sinon point de limite ou pas là où vous voudrez.

3 a $a_n = \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \sqrt[n]{\alpha_n}$ en posant $\alpha_n = \binom{2n}{n}$.

$$\text{Or, } \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4.$$

D'après la question précédente, $\sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4$, i.e.

$$\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4.$$

b $b_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{\beta_n}$ en posant $\beta_n = \frac{n^n}{n!}$.

$$\text{Et, } \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{n^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e.$$

D'après la question précédente, $\sqrt[n]{\beta_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$, i.e.

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e.$$

c $c_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!n^{2n}}} = \sqrt[n]{\gamma_n}$ en posant $\gamma_n = \frac{(3n)!}{n!n^{2n}}$.

De même que précédemment,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} &= \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(3n)!}{n!n^{2n}}} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n^{2n}}{(n+1)(n+1)^{2n+2}} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{27}{e^2}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\sqrt[n]{\gamma_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{27}{e^2}$, i.e.

$$\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{27}{e^2}.$$

Index

- Arctangente
 - Développement limité, 27
- Asymptote, 61
- Binôme
 - de Newton, 23
- Changement de variable
 - dans un développement limité, 29
- Coefficient
 - binomial, 23
- Compatibilité
 - de l'inverse
 - avec équivalents, 48
 - de la composition
 - avec équivalents, 49
 - avec les petits o, 10
 - du produit
 - avec équivalents, 48
 - avec les petits o, 9
- Continuité
 - et développement limité, 15
- Cosinus
 - Développement limité, 27
 - hyperbolique
 - Développement limité, 27
- Croissance
 - comparée, 5
- Dérivabilité
 - et développement limité, 15
- Dérivation
 - des développements limités, 25
- Développement
 - asymptotique, 29, 41, 62
 - de Taylor-Young, 20
 - limité, 11
 - et équivalence, 44
 - Composition, 32
 - Continuité et Dérivabilité, 15
 - d'ordre 1, 15
 - Dérivation, 25
 - de $\arctan(x)$, 18, 27
 - de $\cos(x)$, 23, 27
 - de $\cosh(x)$, 22, 27
 - de e^x , 22, 27
 - de $\ln(x)$ au voisinage de 2, 29
 - de $\ln(1+x)$, 17, 27
 - de $\sqrt{1+x}$, 27
 - de $\sin(x)$, 23, 27
 - de $\sinh(x)$, 22, 27
 - de $\tan(x)$, 18, 24, 26, 27, 39
 - de $(1+x)^\alpha$, 22, 27
 - de $\frac{1}{\cos^2(x)}$, 40
 - de $\frac{1}{1-x}$, 12, 17, 25, 27
 - de $\frac{1}{(1-x)^2}$, 25
 - de $\frac{1}{1+x}$, 27
 - Inversion, 38
 - Opération, 30
 - Parité, 14
 - Primitivation, 16
 - Unicité du développement, 13
- Divergence, 62
- Division
 - euclidienne, 41
 - suivant les puissances croissantes, 41
- Domination, 52, 53
- Équivalence, 42
 - d'un polynôme, 44
 - et limite, 46
- Équivalent
 - Inverse, 48
 - Produit, 48
 - Puissance, 48
- Euler, 45
 - Constante d', 47
- Existence
 - de développement limité, 21
- Exponentielle
 - Développement limité, 27
- Extremum
 - local, 59
- Formule
 - de Stirling, 45
 - de Taylor-Lagrange, 21
 - de Taylor-Young, 20
 - du binôme, 23
- Imparité, 14
- Inverse
 - d'équivalent, 48
- Leibniz, 45
- Limite, 7
 - Calcul de, 55
 - et équivalent, 46
- Logarithme

- Développement limité, 27
- Méthode
 - Équivalent de $\ln(u_n)$, 51
 - Équivalent de e^{u_n} , 52
 - Développement limité d'une réciproque, 36
 - Quotient de développements limités, 39
 - Somme d'équivalents, 49
- Moivre, 45
- Négligeabilité, 3
- Opération
 - sur les développements limités, 29
 - sur les petits o , 7
- Parité, 14
- Partie
 - régulière, 11
- Point
 - d'inflexion, 60
- Polynôme
 - de Taylor, 20
- Primitivation
 - des développements limités, 16
- Produit
 - d'équivalent, 48
 - de petit o , 9
- Relation
 - d'équivalence, 6
 - d'ordre, 8, 54
 - de comparaison
 - Équivalence, 42
 - Domination, 52, 53
 - Négligeabilité, 3
- Série
 - de Taylor, 20
 - géométrique, 23
 - harmonique, 47
- Sinus
 - Développement limité, 27
 - hyperbolique
 - Développement limité, 27
- Somme
 - de petit o , 8
- Stirling, 45
- Tangente, 11
 - Développement limité, 27
- Taylor
 - Young, 20
- Théorème
 - de Taylor, 19
 - des accroissements finis, 16
 - des nombres premiers, 4
- Transitivité
 - de la négligeabilité, 8
- Unicité
 - du développement limité, 13
- Voisinage
 - de a , 7
 - de $+\infty$, 2, 61
 - privé d'un point, 2