

## Suites

## I. Théorème de Cesàro

- 1 a Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , par définition, sachant que  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N \implies |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- b  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|v_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k|$  d'après l'inégalité triangulaire.

$$\text{D'où, } \forall n \geq N, |v_n| \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \sum_{k=N}^n |u_k| \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k|.$$

On peut majorer la deuxième somme, puisque par hypothèse,  $\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$\text{Et, } \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \underbrace{(n - N + 1)}_{\geq 0} \frac{\varepsilon}{2} \leq n \frac{\varepsilon}{2} \text{ (car } N \geq 1) \text{ entraîne } \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq N, |v_n| \leq \frac{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{XV.1})$$

**Commentaires:** Il fallait bien lire  $u_{N-1}$  et non  $u_{n-1}$ . L'indice  $N$  avait pour vocation à être bloqué et fini pendant que  $n$  continuait à faire sa vie vers  $+\infty$ .

- c  $N$  est désormais fixé.

Par conséquent, la somme  $S = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_{N-1}|$  est fixée et la suite  $\left( \frac{S}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge donc vers 0.

Il existe donc un entier  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \geq N_0, \left| \frac{S}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_0 \implies \frac{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{N-1}|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{XV.2})$$

En posant  $N' = \max(N, N_0)$ , et en rassemblant les résultats XV.1 et XV.2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N' \implies |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Autrement dit,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N' \implies |v_n| \leq \varepsilon$  i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

**Commentaires:** L'ingrédient principal de cette question était que la suite  $\left( \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc on doit au moins voir ça clairement. Tout le reste n'est que du blabla qui ne sera pas lu de toute façon.

2

a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v'_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u'_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n \ell \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ \left( \sum_{k=1}^n u_k \right) - n\ell \right] = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - \ell \\ &= v_n - \ell. \end{aligned}$$

(b) On a supposé que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell$ . Par conséquent, la suite  $(u'_n)$  converge vers 0.

D'après la question 1., on sait que la suite  $(v'_n)$  converge aussi vers 0.

Et puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v'_n + \ell$ , d'après les théorèmes sur les limites de sommes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

#### Commentaires:

- Si vos notes tendent vers 20, votre moyenne aussi.
- Quand vous voulez appliquer le résultat de la question précédente à la suite  $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , justifiez correctement que cette suite vérifie les conditions de la question et dites-le surtout !

3

a

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{k=1}^n \sin(k) = \sum_{k=0}^n \sin(k) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} (e^{ik}) \\ &= \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^n (e^i)^k \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right) \text{ car } e^i \neq 1 \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i \frac{n+1}{2}} (e^{-i \frac{n+1}{2}} - e^{i \frac{n+1}{2}})}{e^{i \frac{1}{2}} (e^{-i \frac{1}{2}} - e^{i \frac{1}{2}})} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( e^{i \frac{n}{2}} \frac{-2i \sin \frac{n+1}{2}}{-2i \sin \frac{1}{2}} \right) = \frac{\sin \left( \frac{n+1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \right)} \operatorname{Im} (e^{i \frac{n}{2}}) \\ &= \frac{\sin \left( \frac{n+1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \right)} \sin \left( \frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k) \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin \left( \frac{n+1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \right)} \sin \left( \frac{n}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sin \left( \frac{1}{2} \right)}.$$

$$\text{Or, } \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sin \left( \frac{1}{2} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k) = 0.$$

Commentaires: Pensez à dire que  $e^i \neq 1!!!!$

- b) Si la réciproque du théorème de Cesàro était vraie, on pourrait en déduire que la suite  $(\sin(n))_{n \geq 1}$  converge vers 0. Mais on sait que cette suite diverge.

La réciproque du théorème de Cesàro est fautive.

**Commentaires:**

- Le contre-exemple usuel à la réciproque du théorème de Cesàro est la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergente alors que sa moyenne converge vers 0 mais c'était moins intéressant pour moi que de vous refaire calculer la somme des sinus.
- Pour que la réciproque soit vraie, il faut, en fait, renforcer les hypothèses sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Je vous en donne deux pour la culture seulement :
  - i. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, la réciproque est vraie.
  - ii. Si  $u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$  alors la réciproque est vraie.

## II. Lemme de l'escalier

- 1 Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$ .

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $s_n = u_n - u_{n-1}$ .

Par hypothèse, on a  $s_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  donc, d'après le théorème de Cesàro,  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

Or,  $\sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$  entraîne  $\frac{u_n - u_0}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

Il reste juste à écrire que  $\frac{u_n}{n} = \frac{u_n - u_0}{n} + \frac{u_0}{n}$  et à remarquer que  $\frac{u_0}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  pour conclure avec les théorèmes sur les limites de sommes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell. \quad (\text{Lemme de l'escalier})$$

**Commentaires:**  $u_n$  désignant la hauteur d'un escalier à hauteur de marche variable,  $u_{n+1} - u_n$  la hauteur de la  $(n+1)^{\text{ème}}$  marche, le théorème indique que si la hauteur de marche tend vers une valeur  $\ell$ , alors la hauteur de l'escalier est équivalente à celle d'un escalier à hauteur de marche constante égale à  $\ell$ .

- 2 Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle à termes strictement positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$ .

La suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est également à termes strictement positifs.

Donc, passage à la limite, sa limite  $a$  est positive ou nulle.

**Commentaires:** Avant de composer par une fonction, pensez à vérifier que vous êtes dans son domaine de définition. Ici « strictement positifs ».

Posons  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \ln u_n$  ce qui est légitime d'après la remarque ci-dessus.

Si  $a > 0$  : On a  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \\ \lim_{x \rightarrow a} \ln(x) = \ln(a) \text{ par continuité de } \ln \text{ en } a. \end{cases}$

Par composition des limites,  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(a)$ .

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = v_{n+1} - v_n$ .

D'où,  $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(a)$ .

D'après le lemme de l'escalier,  $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(a)$ .

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{v_n}{n} = \frac{1}{n} \ln(u_n) = \ln(\sqrt[n]{u_n})$ .

On a donc  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = \ln(a) \\ \lim_{x \rightarrow \ln(a)} e^x = e^{\ln(a)} = a \text{ par continuité de exp en } \ln(a). \end{cases}$

Par composition des limites,  $e^{\ln(\sqrt[n]{u_n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ .

D'où :

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$

Si  $a = 0$  : le raisonnement est exactement le même, en remplaçant tous les  $\ln(a)$  par  $-\infty$ .

**Commentaires:** Pensez à citer la continuité de l'exponentielle avant de composer par elle sinon point de limite ou pas là où vous voudrez.

$$\textcircled{3} \quad \textcircled{a} \quad a_n = \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \sqrt[n]{\alpha_n} \text{ en posant } \alpha_n = \binom{2n}{n}.$$

$$\text{Or, } \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4.$$

D'après la question précédente,  $\sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$ , i.e.

$$\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4.$$

$$\textcircled{b} \quad b_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{\beta_n} \text{ en posant } \beta_n = \frac{n^n}{n!}.$$

$$\text{Et, } \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{n^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

D'après la question précédente,  $\sqrt[n]{\beta_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ , i.e.

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

$$\textcircled{c} \quad c_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!n^{2n}}} = \sqrt[n]{\gamma_n} \text{ en posant } \gamma_n = \frac{(3n)!}{n!n^{2n}}.$$

De même que précédemment,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} &= \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(3n)!}{n!n^{2n}}} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n^{2n}}{(n+1)(n+1)^{2n+2}} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{27}{e^2}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente,  $\sqrt[n]{\gamma_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{27}{e^2}$ , i.e.

$$\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{27}{e^2}.$$

# Index

- Arctangente
  - Développement limité, 27
- Asymptote, 61
- Binôme
  - de Newton, 23
- Changement de variable
  - dans un développement limité, 29
- Coefficient
  - binomial, 23
- Compatibilité
  - de l'inverse
    - avec équivalents, 48
  - de la composition
    - avec équivalents, 49
    - avec les petits o, 10
  - du produit
    - avec équivalents, 48
    - avec les petits o, 9
- Continuité
  - et développement limité, 15
- Cosinus
  - Développement limité, 27
  - hyperbolique
    - Développement limité, 27
- Croissance
  - comparée, 5
- Dérivabilité
  - et développement limité, 15
- Dérivation
  - des développements limités, 25
- Développement
  - asymptotique, 29, 41, 62
  - de Taylor-Young, 20
  - limité, 11
    - et équivalence, 44
    - Composition, 32
    - Continuité et Dérivabilité, 15
    - d'ordre 1, 15
    - Dérivation, 25
    - de  $\arctan(x)$ , 18, 27
    - de  $\cos(x)$ , 23, 27
    - de  $\cosh(x)$ , 22, 27
    - de  $e^x$ , 22, 27
    - de  $\ln(x)$  au voisinage de 2, 29
    - de  $\ln(1+x)$ , 17, 27
    - de  $\sqrt{1+x}$ , 27
    - de  $\sin(x)$ , 23, 27
    - de  $\sinh(x)$ , 22, 27
    - de  $\tan(x)$ , 18, 24, 26, 27, 39
    - de  $(1+x)^\alpha$ , 22, 27
    - de  $\frac{1}{\cos^2(x)}$ , 40
    - de  $\frac{1}{1-x}$ , 12, 17, 25, 27
    - de  $\frac{1}{(1-x)^2}$ , 25
    - de  $\frac{1}{1+x}$ , 27
  - Inversion, 38
  - Opération, 30
  - Parité, 14
  - Primitivation, 16
  - Unicité du développement, 13
- Divergence, 62
- Division
  - euclidienne, 41
  - suivant les puissances croissantes, 41
- Domination, 52, 53
- Équivalence, 42
  - d'un polynôme, 44
  - et limite, 46
- Équivalent
  - Inverse, 48
  - Produit, 48
  - Puissance, 48
- Euler, 45
  - Constante d', 47
- Existence
  - de développement limité, 21
- Exponentielle
  - Développement limité, 27
- Extremum
  - local, 59
- Formule
  - de Stirling, 45
  - de Taylor-Lagrange, 21
  - de Taylor-Young, 20
  - du binôme, 23
- Imparité, 14
- Inverse
  - d'équivalent, 48
- Leibniz, 45
- Limite, 7
  - Calcul de, 55
  - et équivalent, 46
- Logarithme

- Développement limité, 27
- Méthode
  - Équivalent de  $\ln(u_n)$ , 51
  - Équivalent de  $e^{u_n}$ , 52
  - Développement limité d'une réciproque, 36
  - Quotient de développements limités, 39
  - Somme d'équivalents, 49
- Moivre, 45
- Négligeabilité, 3
- Opération
  - sur les développements limités, 29
  - sur les petits  $o$ , 7
- Parité, 14
- Partie
  - régulière, 11
- Point
  - d'inflexion, 60
- Polynôme
  - de Taylor, 20
- Primitivation
  - des développements limités, 16
- Produit
  - d'équivalent, 48
  - de petit  $o$ , 9
- Relation
  - d'équivalence, 6
  - d'ordre, 8, 54
  - de comparaison
    - Équivalence, 42
    - Domination, 52, 53
    - Négligeabilité, 3
- Série
  - de Taylor, 20
  - géométrique, 23
  - harmonique, 47
- Sinus
  - Développement limité, 27
  - hyperbolique
    - Développement limité, 27
- Somme
  - de petit  $o$ , 8
- Stirling, 45
- Tangente, 11
  - Développement limité, 27
- Taylor
  - Young, 20
- Théorème
  - de Taylor, 19
  - des accroissements finis, 16
  - des nombres premiers, 4
- Transitivité
  - de la négligeabilité, 8
- Unicité
  - du développement limité, 13
- Voisinage
  - de  $a$ , 7
  - de  $+\infty$ , 2, 61
  - privé d'un point, 2