Analyse asymptotique

On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{e^x - 1} \end{array}$$

Question préliminaire

1. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et préciser alors sa valeur en 0.

   On continuera de noter f le prolongement de f.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.

3. En déduire la courbe représentative de f au voisinage de 0

4. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.

Calcul des coefficients de Bernoulli

On admet que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on définit alors les *nombres de Bernoulli* B_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{B}_n = f^{(n)}(0).$$

5. Déterminer $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1$ et B_2.

6. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre n en fonction des nombres de Bernoulli.

7. On pose, pour tout réel x, $g(x) = f(2x) + x$.
   a. Démontrer que g est une fonction paire.
   b. Exprimer en fonction des nombres de Bernoulli son développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ et en déduire :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathrm{B}_{2k+1} = 0.$$

   Que vaut B_3 ?

8. a. En remarquant que pour tout réel x on a $(e^x - 1)f(x) = x$, démontrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \mathrm{B}_k = 0.$$

   b. Préciser $\mathrm{B}_4, \mathrm{B}_5$ et B_6.

Alternance des signes des nombres B_{2n}

9. Vérifier que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

   $$xy' + (x-1)y + y^2 = 0.$$

10. On pose alors :

    $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = xf'(x) + (x-1)f(x) + \big(f(x)\big)^2.$$

    En dérivant $2n$ fois la fonction ϕ, en déduire la relation :

    $$\forall n \geqslant 2, \quad (2n+1)\mathrm{B}_{2n} = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} \mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}.$$

11. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, B_{2n} est du signe de $(-1)^{n-1}$.