Analyse asymptotique

Question préliminaire

1 $\dfrac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

On peut donc prolonger la fonction f par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.

Commentaires:

- *Pour ceux (Si, Na, Ph, Man et Va mais chut !) qui ont évoqué un taux d'accroissement. C'est bien gentil mais si vous ne me dites pas que la fonction est dérivable en 0, vous ne prouverez jamais rien et ne ferez qu'affirmer ou paraphraser.*
- *Bien sûr, il est hors de question d'invoquer les théorèmes généraux sur les limites de quotients !*
- *Je redis (encore !) que f ne sera jamais continue en 0 (elle n'y est même pas définie) mais seulement son prolongement $\tilde{f}$ que l'on continue à noter f.*
- *Pour Mat, la valeur en 0 est une limite pour f et le restera mais une simple valeur pour $\tilde{f}$.*

2 Comme exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité en 0 à tout ordre et, en particulier,

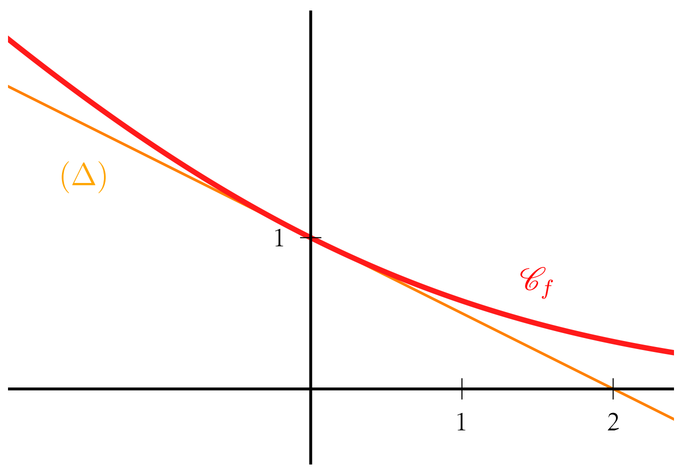
$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)}$$

Or, $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$.

$$\begin{aligned}\text{D'où,}\quad \frac{x}{e^x-1} &\underset{x\to 0}{=} 1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)+\left(\frac{1}{2}x+\mathrm{o}\left(x\right)\right)^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Commentaires: *Dans le calcul des DL de fonctions composées, n'oubliez pas de préciser que vous pouvez en précisant comme ici, $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(1\right)$.*

3 On déduit de ce développement limité que la droite $(\Delta) : y = 1-\dfrac{1}{2}x$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, et que la courbe est localement située au-dessus de sa tangente.



4 Comme $e^x - 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}$ qui est du signe de $u(x) = (1-x)e^x - 1$.

u est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -xe^x$. On en déduit les variations de u et son signe sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$u(x)$		$-$	0	$-$	

On en déduit que la dérivée de f est strictement négative sur l'intervalle $\mathbb{R}^*$. Étant continue, de dérivée strictement positives sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en le point isolé 0, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Commentaires: *Il est fondamental de dire que la fonction est continue pour pouvoir conclure à sa décroissance sinon pensez à* $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

D'après 1, f est aussi continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on en déduit finalement que la fonction f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Commentaires:

- *Le développement limité ne donne absolument aucune information sur le comportement global de f ! Ça veut dire quoi déjà « limité » ?*
- *Si d'ordinaire on tolère l'expression « f est continue sur $\mathbb{R}^*$ » qui est tout de même un non-sens, ici elle ne pouvait pas être utilisée pour invoquer le théorème de la bijection. S'il avait fallu, on aurait regardé séparément l'éventualité d'une bijection sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ avant de conclure.*

Calcul des coefficients de Bernoulli

5 En admettant que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Taylor-Young, f admet alors un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to0}{=} f(0) + f'(0) + \frac{f'(0)}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Par unicité de la partie régulière du développement limité de f en 0, d'après 2, on a :

$$\mathrm{B}_1 = f(0) = 1, \quad \mathrm{B}_2 = f'(0) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_2 = f''(0) = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Commentaires:

— *Même si le développement limité à l'ordre 2 sera unique à partir du moment où il existe, cela ne prouvera jamais que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Cette équivalence dérivabilité/DL s'arrête strictement à l'ordre 1. C'est pour cela que l'on doit admettre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ afin d'utiliser la formule de Taylor même si, on était aussi capable de le montrer mais cela économise quelques lignes hors de propos.*

— *Quand vous identifiez, le mot important à écrire est « unicité » du développement limité sinon, autant tirer au sort les coefficients !*

6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un unique $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{B}_k}{k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

Commentaires: *Ici encore deux mots à écrire absolument « unicité » et « classe $\mathscr{C}^2$ » pour pouvoir écrire et identifier.*

7 (a) $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$\begin{aligned}
g(-x) - g(x) &= (f(-2x) - x) - (f(2x) + x) \\
&= \left(\frac{-2x}{e^{-2x} - 1}\right) - \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1}\right) - 2x \\
&= 2x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{e^{2x} - 1} - 1\right) \\
&= 2x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1 - \mathrm{e}^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que g est paire.

(b) Tous les coefficients d'ordre impair dans son développement limité sont donc nuls.

Or, d'après les théorèmes sur les composées à droite et les sommes de développements limités, on a :

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(2x) + x \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{B}_k}{k!} (2x)^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) + x \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \underbrace{(2\mathrm{B}_1 + 1)}_{=0 \text{ d'après } 5} x + \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k \mathrm{B}_k}{k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout k impair et supérieur à 2 (donc 3) $\dfrac{2^k \mathrm{B}_k}{k!} = 0$.

En conclusion, $\forall p \in \mathbb{N}^\star$, $\mathrm{B}_{2p+1} = 0$.

En particulier, $\mathrm{B}_3 = 0$.

8 (a) Si on pose $u : x \longmapsto e^x - 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) f(x) = x.$$

Les fonctions u et f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut dériver :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) f(x) + u(x) f'(x) = 1.$$

En appliquant cette formule en 0, on retrouve $\mathrm{B}_0 = 1$.
En dérivant $n+1$ fois (avec $n \geqslant 1$) et d'après la formule de Leibniz :

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)}(x) f^{(k)}(x) = 0.$$

Pour $x = 0$, on a :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)}(0) \mathrm{B}_k = 0.$$

En remarquant que $u(0) = 0$ et que $\forall\, i \geqslant 1$, $u^{(i)}(0) = 1$, on obtient finalement :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \mathrm{B}_k = 0.$$

b) On en déduit :

Pour $n = 4$ **:** $\binom{5}{0}\mathrm{B}_0 + \binom{5}{1}\mathrm{B}_1 + \binom{5}{2}\mathrm{B}_2 + \binom{5}{3}\mathrm{B}_3 + \binom{5}{4}\mathrm{B}_4 = 0$.

D'où, $1 - \frac{5}{2} + 10\frac{1}{6} + 0 + 5\mathrm{B}_4 = 0$ et $\mathrm{B}_4 = -\frac{1}{30}$.

Pour $n = 5$ **:** $\mathrm{B}_5 = 0$ d'après 7 b).

Pour $n = 6$ **:** $\binom{7}{0}\mathrm{B}_0 + \binom{7}{1}\mathrm{B}_1 + \binom{7}{2}\mathrm{B}_2 + \binom{7}{3}\mathrm{B}_3 + \binom{7}{4}\mathrm{B}_4 + \binom{7}{5}\mathrm{B}_5 + \binom{7}{6}\mathrm{B}_6 = 0$.

D'où, $1 - \frac{7}{2} + 21\frac{1}{6} + 0 + 35\frac{-1}{30} + 0 + 7\mathrm{B}_6 = 0$ et $\mathrm{B}_6 = \frac{1}{42}$.

En conclusion,

n	0	1	2	3	4	5	6
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$

Alternance des signes des nombres B_{2n}

9 Comme f est au moins de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de calculer :

Commentaires: *Il est plus malin de dériver f comme un produit.*

$\forall\, x \in \mathbb{R}^\star$,

$$\begin{aligned} xf'(x) + (x-1)f(x) + f(x)^2 &= x\left(\frac{1}{\cancel{e^x - 1}} - \frac{xe^x}{(e^x-1)^2}\right) + (x - \cancel{1})\frac{x}{e^x - 1} + \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2 \\ &= -\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} + \frac{x^2}{e^x-1} + \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{(e^x-1)^2}\left(e^x + (e^x - 1) + 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $0f'(0) + (0-1)f(0) + f(0)^2 = 0$: la relation est également vraie à l'origine.

La fonction f est donc bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy'+(x-1)y+y^2=0$.

Commentaires: *Cessez (Na) de me faire des lignes égales à 0 alors que vous ne le savez pas !*

On calcule $xf'(x)+(x-1)f(x)+f(x)^2$ avec l'expression de f que l'on a, on tripatouille, simplifie et, Ô miracle ! on trouve 0. C'est tout et pas autrement.

10 D'après la question précédente, on sait déjà que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x)=0$ ce qui entraîne, ϕ étant clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi^{(2n)}(0)=0.$$

Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi^{(2n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\Big(xf'(x)\Big)+\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\Big((x-1)f(x)\Big)+\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\Big(\big(f(x)\big)^2\Big).$$

Or, d'après la formule de Leibniz :

- ◇ $\dfrac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\Big(xf'(x)\Big)=xf^{(2n+1)}(x)+(2n)f^{(2n)}(x)\,;$
- ◇ $\dfrac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\Big((x-1)f(x)\Big)=(x-1)f^{(2n)}(x)+(2n)f^{(2n-1)}(x)\,;$
- ◇ $\dfrac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\Big(\big(f(x)\big)^2\Big)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}f^{(k)}(x)f^{(2n-k)}(x)$

Pour $x=0$, on a alors :

$$(2n)\mathrm{B}_{2n}-\mathrm{B}_{2n}+2n\mathrm{B}_{2n-1}+\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{B}_k\mathrm{B}_{2n-k}=0$$

À part B_1, les B_k sont nuls pour k impairs. On peut simplifier la somme :

$$(2n-1)\mathrm{B}_{2n}+2n\mathrm{B}_{2n-1}+\binom{2n}{1}\underset{\substack{\|\\1}}{\mathrm{B}_1}\mathrm{B}_{2n-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}=0$$

$$(2n-1)\mathrm{B}_{2n}+\underset{\substack{\|\\1}}{\mathrm{B}_0}\mathrm{B}_{2n}+\mathrm{B}_{2n}\underset{\substack{\|\\1}}{\mathrm{B}_0}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}\mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}=0$$

$$(2n+1)\mathrm{B}_{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}\mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}=0$$

Et finalement :

$$(2n+1)\mathrm{B}_{2n}=-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}\mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}.$$

11 On montre ce résultat par une récurrence forte (nécessaire car chaque B_{2n} dépend de tous les B_{2k} précédents) :

- $\mathrm{B}_{2\times1}=\dfrac{1}{6}$ est du signe de $(-1)^{1-1}$
- Supposons qu'il existe un entier $n\geqslant 2$ tel que B_{2k} est du signe de $(-1)^{k-1}$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Alors pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}$ est du signe de $(-1)^{k-1}(-1)^{n-k-1} = (-1)^n$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} \mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}$ est donc également du signe de $(-1)^n$.

Donc $\mathrm{B}_{2n} = -\dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} \mathrm{B}_{2k}\mathrm{B}_{2n-2k}$ est du signe de $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$.
La propriété est bien héréditaire.

Initialisée à partir de $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier non nul :

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathrm{B}_{2n} \text{ est du signe de } (-1)^{n-1}.$$

Commentaires: *Les nombres de Bernoulli interviennent dans le calculs de sommes comme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ *ou* $\zeta(2p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$, *et dans certains développements limités, comme celui de la tangente et de la tangente hyperbolique :*

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\mathrm{B}_{2k}|4^k(4^k-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right) \quad \textit{et} \quad \mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{B}_{2k}4^k(4^k-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right).$$