Analyse asymptotique

Exercice 1 : Donner les développements limités suivants :

1. $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
2. $DL_5(0)$ de $(1+\sin x)^{\cos(2x)-1}$
3. $DL_2(-1)$ de $\arctan\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$
4. $DL_5(0)$ de $\dfrac{1-\cos(x)}{\mathrm{ch}(x)-1}$

Exercice 2 : Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$.
2. Déterminer le $DL_{10}(0)$ de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.
3. Soient $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ définie par $f(x) = x+\cos x$.
   a) Montrer que f est bijective sur I.
   b) Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f^{-1} au voisinage de 1.

Problème 3 : On définit $g : x \mapsto (x^2+1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de g ?
2. Chercher un équivalent simple de $g(x)$ en $x=0$, puis calculer la limite de $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
3. Même question en -1.
4. Montrer qu'il existe des constantes a, b et c telles qu'au voisinage de $\pm\infty$ on ait

$$g(x) \underset{x\to\infty}{=} ax+b+\frac{c}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Conséquence graphique pour $\mathcal{C}_g$.

Problème 4 : On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \ (x^2+1)\,y' - xy = 1+x.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E).
2. Déterminer une fonction affine g solution de (E). En déduire l'ensemble des solutions de E.

On notera pour la suite y_λ la solution de E de la forme $g(x)+\lambda\sqrt{1+x^2}$, et $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative correspondante.

3. a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ en son point d'abscisse 1.
   b) Prouver que toutes les tangentes calculées ci-dessus se coupent en un même point lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$.
4. a) Calculer un DL à l'ordre 2 en 0 $\sqrt{1+x+\dfrac{x^2}{2}}$.
   b) Calculer un DL à l'ordre 2 en 1 (et pas en 0 !) de y_λ.
   c) En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_\lambda$ et de sa tangente en 1 (en fonction de λ) au voisinage de 1.
5. Déterminer un développement asymptotique de y_λ en $+\infty$, et en déduire l'existence éventuelle d'asymptotes obliques pour les courbes $\mathcal{C}_\lambda$ en $+\infty$.

   Que se passe-t-il en $-\infty$?
6. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ tenant compte de tous les calculs effectués précédemment.