Analyse asymptotique

Exercice 1 :

Commentaires: *L'erreur la plus fréquente que vous faite est de vouloir utiliser un développement du type* $f(u) \underset{u\to 0}{=} \dots$ *sans faire attention au fait que votre fonction* u *soit vraiment un* $o(1)$ i.e. *telle que* $\lim u = 0$.

1.
$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{1+\left(1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right)} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1+\underbrace{\frac{x}{4}-\frac{1}{16}x^2+o\left(x^2\right)}_{=o(1)}}\\
&\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{16}x^2+o\left(x^2\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}-\cancel{\frac{1}{16}x^2+o\left(x^2\right)}\right)^2\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\times 16}+\frac{1}{8\times 16}\right)x^2+o\left(x^2\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^2+o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
(1+\sin x)^{\cos(2x)-1} &= \mathrm{e}^{\left(\cos(2x)-1\right)\ln\left(1+\sin(x)\right)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\left(-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)\right)\ln\left(1+\underbrace{x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)}_{\underset{x\to 0}{=}o(1)}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\left(-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\underbrace{-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5+o\left(x^5\right)}_{\underset{x\to 0}{=}o(1)}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5+o\left(x^5\right)\right)+\cancel{\underbrace{\frac{1}{2}\left(-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5 o\left(x^5\right)\right)^2}_{\underset{x\to 0}{=}o(x^6)}}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5+o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Commentaires: $(1+\sin x)^{\cos(2x)-1}$ *n'est pas du tout de la forme* $(1+\sin x)^{\alpha}$ *!!!! Vous voyez pas que* $\cos(2x)-1$, *ça bouge ?*

3. La fonction $f : x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$ est de classe au moins $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de -1 (il suffit d'éviter -2).

Elle est, en particulier, dérivable et sa dérivée admet un développement limité que l'on va primitiver pour obtenir celui de f : On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \neq -2,\ f'(x) &= \frac{3}{(2+x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2} = \frac{3}{(2+x)^2+(2x+1)^2} = \frac{3}{5+8x+5x^2} \\
&\underset{x=h-1}{=} \frac{3}{2-2h+5h^2} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-h+\frac{5}{2}h^2} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{3}{2}\left(1+h+\mathrm{o}\left(h\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{3}{2}+\frac{3}{2}h+\mathrm{o}\left(h\right). \\
f(x) &\underset{h\to 0}{=} f(-1)+\frac{3}{2}h+\frac{3}{4}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right) \\
&\underset{x\to -1}{=} -\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}(x+1)+\frac{3}{4}(x+1)^2+\mathrm{o}\left((x+1)^2\right)
\end{aligned}$$

Commentaires:

- *Pour prouver que* $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$ *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ *il est faux de dire que* $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ *et* $x \longmapsto \arctan(x)$ *sont de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

  En effet, $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ *est effectivement de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ *comme quotient de fonctions de classe* $\mathscr{C}^2$ *dont le dénominateur ne s'annule pas mais est à valeurs dans* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. *C'est sur ce dernier intervalle que* arctan *doit être de classe* $\mathscr{C}^2$.

  La fonction arctan *étant de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$, *vous aviez de la chance et il suffisait simplement de dire que* arctan *était de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ *et conclure d'après les théorèmes sur les composées de fonctions de classe* $\mathscr{C}^2$.

- *S'attaquer directement et comme usuellement à* $\arctan\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$ *amène à un cul de sac technique et nous aurait de toute manière obligé à utiliser la formule de Taylor-Young :*

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) &\underset{x=h-1}{=} \arctan\left(\frac{2h-1}{h+1}\right) \underset{h\to 0}{=} \arctan\left((-1+2h)(1-h+h^2+o\left(h^2\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \arctan\left(-1+3h-3h^2+o\left(h^2\right)\right)\ldots ???
\end{aligned}$$

  Pas de formules trigonométriques pour nous aider à nous ramener en 0.

- *Les monômes de la formule de Taylor-Young en* -1 *sont* $(x+1)^k$ *et non* x^k.

4

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(x)}{\mathrm{ch}(x)-1} &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right)\times\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\mathrm{o}\left(x^7\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)}_{\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}(1)}} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\left(1-\left(\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\right. \\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{12}x^2+\cancel{\frac{1}{360}x^4}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{240}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(\frac{1}{240}+\frac{1}{144}+\frac{1}{360}\right)x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{72}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1 La seule difficulté est de pousser assez loin les DLs respectifs.

$$\begin{aligned}
\sin(\tan(x)) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)^3\\
&\quad +\frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^5-\frac{1}{7!}\left(x+\cdots\right)^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)-\frac{1}{3!}\left(x^3+x^5+\frac{2}{5}x^7+\frac{1}{3}x^7\right)\\
&\quad +\frac{1}{5!}\left(x^5+\frac{5}{3}x^7\right)-\frac{1}{7!}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\sin(\tan(x)) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{40}x^5-\dfrac{55}{1008}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right).$

Et,

$$\begin{aligned}
\tan(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7}+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^3+\frac{2}{15}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^5\\
&\quad -\frac{17}{315}\left(x+\cdots\right)^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+\frac{3}{5!}x^7+\frac{1}{12}x^7\right)+\frac{2}{15}\left(x^5-\frac{5}{3!}x^7\right)\\
&\quad -\frac{17}{315}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\sin(\tan(x)) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{40}x^5-\dfrac{107}{5040}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right).$

Par conséquent, $\tan(\sin(x))-\tan(\sin(x)) = -\dfrac{1}{30}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)$.

D'où $\dfrac{\sin(\tan(x))-\tan(\sin(x))}{x^7} = -\dfrac{1}{30}+\mathrm{o}(1)$.

Donc,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7} = -\frac{1}{30}.$$

Commentaires:

— *Si vous voulez justifier (ce qui est bien) que* $\sin(\tan)$ *et* $\tan(\sin)$ *admettent un* $\mathrm{DL}_7(0)$ *en disant que les fonctions* $\sin$ *et* $\tan$ *sont de classe* $\mathscr{C}^7$ *dans un voisinage de* 0*, n'oubliez pas (ce qui n'est pas bien) de préciser que* $\tan(0)=0$ *pour* $\sin(\tan)$ *et* $\sin(0)=0$ *pour* $\tan(\sin)$*.*

— *Écrire que «* $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ *donc* $\sin(\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x$ *» est vrai mais pas de pousser le DL de* $\sin(\tan(x))$ *plus loin comme si c'était celui de* $\sin(x)$*.*

2 On pose $\phi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

On a alors $\phi(x) \underset{x\to 0}{=} (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{3}{8}x^8+\mathrm{o}\left(x^9\right)$.

La fonction ϕ étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse :

$\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ est la primitive de ϕ s'annulant en 0.

Par intégration du DL de ϕ, on obtient : $\Phi(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)$.

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} &= \Phi(x^2) - \Phi(x)\\ &\underset{x\to 0}{=} \left[x^2 - \frac{1}{10}x^{10} + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)\right] - \left[x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)\right]\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)$$

Commentaires:

— *Ici, il faut bien comprendre que l'on ne pouvait pas utiliser le théorème sur les primitivation directement à cause des bornes de l'intégrale qui ne sont pas constantes.*

— *On peut aussi poser* $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

On dérive : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 2x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$*, on fait le* $\mathrm{DL}_9(0)$*, puis on intègre.*

— *Pour les expressions de la forme* $\frac{1}{\sqrt{1+u}}$ *pensez à les voir comme* $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ *plutôt que comme la composée de* $\mathrm{X} \longmapsto \frac{1}{\mathrm{X}}$ *et de* $u \longmapsto \sqrt{1+u}$.

3 (a)
— f est **continue** sur I comme somme de fonctions continues ;
— f est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I},\quad f(x) = 1 - \sin x > 0$ sur I. Donc f est **strictement croissante** sur I.
— $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

D'après le théorème de la bijection, on en déduit que f est bijective.

(b) Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, de dérivée ne s'annule pas, sa réciproque est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Première méthode : D'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f^{-1} admet un DL à tout ordre en 1.

En particulier,

$$f^{-1}(x) \underset{h\to 0}{=} f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x-1) + \frac{(f^{-1})^{(2)}(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{(f^{-1})^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \mathrm{o}\left((x-1)^3\right).$$

Or,
— $f^{-1}(1) = 0$ car $f(0) = 1$.
— $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ d'où $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$.
— $(f^{-1})^{(2)}(x) = -\frac{(f^{-1})'(x) f^{(2)}(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^2}$ d'où $(f^{-1})^{(2)}(1) = 1$.
— $(f^{-1})^{(3)}(x) =$ trop long.

Donc, $f^{-1}(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{?}{3!}(x-1)^3 + \mathrm{o}\left((x-1)^3\right)$.

Commentaires: *Mais le calcul des dérivées successives de* f^{-1} *est pénible... On cherche donc une méthode un peu plus intelligente et avec moins de calculs :*

Deuxième méthode : D'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f^{-1} admet un DL à l'ordre 3 en 1, qu'on pose a priori :

$$f^{-1}(1+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

Par composition des DL :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(x+\cos x)\\
&\underset{x\to 0}{=} f^{-1}\left(1+\underbrace{x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}_{h=\mathrm{o}(1)}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} a_0+a_1\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)+a_2\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2+a_3\left(x+\mathrm{o}\left(x\right)\right)^3\\
&\underset{x\to 0}{=} a_0+a_1x+\left(a_2-\frac{a_1}{2}\right)x^2+\left(a_3-a_2\right)x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Mais par ailleurs $\forall x\in \mathrm{I},\quad f^{-1}(f(x))=x$, d'où $f^{-1}(f(x))\underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Par unicité de la partie régulière du DL en 0, on en déduit :

$$\begin{cases} a_0=0\\ a_1=1\\ a_2-\dfrac{a_1}{2}=0\\ a_3-a_2=0\end{cases},\ i.e.\ \begin{cases} a_0 &= 0\\ a_1 &= 1\\ a_2 &= \dfrac{1}{2}\\ a_3 &= \dfrac{1}{2}\end{cases}\ \text{donc } f^{-1}(1+h)\underset{h\to 0}{=} h+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h^3+\mathrm{o}\left(h^3\right).$$

Finalement,

$$f^{-1}(x)\underset{x\to 1}{=}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\mathrm{o}\left((x-1)^3\right).$$

Commentaires: *Au lieu de l'égalité $\forall x\in \mathrm{I},\ f^{-1}(f(x))=x$, on aurait aussi utiliser $\forall x\in \mathrm{I},\ f(f^{-1}(x))=x$, mais la composition fait apparaitre un système* ***non linéaire****, beaucoup moins pratique à résoudre.*

Problème 3 :

1. $\mathrm{D}_g =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

Commentaires: *Je rappelle encore une fois que pour trouver le signe de $\dfrac{x+1}{x}$, il suffit de faire un tableau de signes ou se rappeler qu'on n'est pas loin de celui de la parabole $x(x+x)$ à un pôle près.*

Comprenez bien, qu'écrire en fin de PTSI « $\dfrac{x+1}{x}>0 \iff x+1>0$ et $x>0$ » fait peine ou pitié c'est selon.

2. $$\begin{cases} (x^2+1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln x\\ \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\underset{x\to 0}{\sim} 1 \underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}\left(-\ln x\right)\end{cases}\quad \text{donc } g(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln x \text{ et } \lim_{x\to 0} g(x)=+\infty.$$

Commentaires: *Prenez le temps de réfléchir aux égalités suivantes :*

$$x\underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right),\qquad \ln(x)\underset{x\to+\infty}{=} o\left(x\right),\quad 1\underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)\right)\quad et\quad 1\underset{x\to+\infty}{=} o\left(\ln(x)\right).$$

3. On pose $x=-1-h$ (avec $h>0$).

D'où,

$$g(-1-h)=(2+2h+h^2)[\ln(h)-\ln(1+h)]-\frac{1}{h}-1-h$$

OR, $\begin{cases}(2+2h+h^2)[\ln(h)-\ln(1+h)]\underset{h\to 0}{\sim} 2\ln h\\ -\dfrac{1}{h}-1-h\underset{h\to 0}{\sim}-\dfrac{1}{h}\end{cases}$

Comme $2\ln h\underset{h\to 0}{=}\mathrm{o}\left(-\dfrac{1}{h}\right)$, on a donc $g(-1-h)\underset{h\to 0}{\sim}-\dfrac{1}{h}$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1} g(x)=-\infty$.

4 $g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} 2x - \frac{1}{2} + \frac{7}{3x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc, $(\mathscr{D}) :\ y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $\pm\infty$.

La position relative est donnée par le signe de $\frac{7}{3x}$ *i.e.* $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $(\mathscr{D})$ au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

Problème 4 :

1 On peut normaliser sur $\mathbb{R}$ tout entier pour obtenir une équation homogène de la forme

$$y' - \frac{x}{x^2+1}y = 0,$$

dont les solutions sont de la forme $\lambda e^{\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)} = \lambda\sqrt{x^2+1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Posons donc $g(x) = ax + b$, alors $g'(x) = a$.

g est solution de (E) si, et seulement si $\left(x^2+1\right)g' - xg = ax^2 + a - ax^2 - bx = a - bx$ est égal à $1 + x$.

Une identification immédiate impose $a = 1$ et $b = -1$, soit $g(x) = x - 1$.

Les solutions de l'équation (E) sont donc toutes les fonctions

$$y_\lambda : x \longmapsto x - 1 + \lambda\sqrt{1+x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3 (a) La tangente recherchée a pour équation $(\mathrm{T}_\lambda) : y = y_\lambda'(1)(x-1) + y_\lambda(1)$.

— On a déjà $y_\lambda(1) = \lambda\sqrt{2}$.

— De plus, comme y_λ est solution de (E) *i.e.* $(1+x^2)y_\lambda'(x) - xy_\lambda(x) = 1 + x$.

Pour $x = 1$, on a, en particulier :

$$\begin{aligned}2y_\lambda'(1) - y_\lambda(1) &= 2\\ y_\lambda'(1) &= 1 + \frac{1}{2}y_\lambda(1)\\ y_\lambda'(1) &= 1 + \lambda\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

La tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ en 1 a donc pour équation :

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}_\lambda) :\ y &= \left(1 + \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\right)(x-1) + \lambda\sqrt{2}\\ &= x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)\lambda \qquad \text{(XVIII.1)}\\ &= \left(1 + \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\right)x - 1 + \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Commentaires: *Il est tout à fait inutile de reprendre l'expression de y_λ trouvée en* 2 *et de la dériver. Calcul qu'il vaut mieux éviter de commettre en utilisant intelligemment la définition de y_λ comme solution de* (E)*.*

(b) D'après (XVIII.1), pour $x = -1$, le paramètre λ disparaît. Toutes ces droites passent donc par le point $\mathrm{I}\,(-1\,;-2)$.

4 (a) Comme $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \mathrm{o}\left(u^2\right)$, on en déduit

$$\sqrt{1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2}}_{u=\mathrm{o}(1)}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

(b) Posons $x = 1 + h$.

$$\begin{aligned}
y_\lambda(1+h) &= 1+h-1+\lambda\sqrt{(1+h)^2+1} = h+\lambda\sqrt{2}\sqrt{1+h+\frac{h^2}{2}}\\
&\underset{h\to 0}{=} h+\lambda\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{8}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \lambda\sqrt{2}+\left(1+\frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\right)h+\frac{\lambda\sqrt{2}}{8}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\\
y_\lambda(x) &\underset{x\to 1}{=} \underbrace{\lambda\sqrt{2}+\left(1+\frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\right)(x-1)}_{(\mathrm{T}_\lambda)}+\frac{\lambda\sqrt{2}}{8}(x-1)^2+\mathrm{o}\left((x-1)^2\right).
\end{aligned}$$

Commentaires: *Une autre méthode que je trouve plus jolie que le gros DL de bourrin est de revenir encore une fois à la définition de y_λ comme solution de (E) :*

$$(1+x^2)y_\lambda' - xy_\lambda = 1+x.$$

Égalité entre fonctions dérivables que l'on peut donc dériver et obtenir :

$$(1+x^2)y_\lambda'' + xy_\lambda' - y_\lambda = 1.$$

Et pour $x = 1$:

$$2y_\lambda''(1) + y_\lambda'(1) - y_\lambda(1) = 1.$$

Or, $y_\lambda(1) = \lambda\sqrt{2}$ et $y_\lambda'(1) = 1+\lambda\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{D'où, } y_\lambda''(1) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4}.$$

Il suffit alors d'appliquer la formule de Taylor-Young à y_λ de classe au moins $\mathscr{C}^2$ en 1 :

$$\begin{aligned}
y_\lambda(x) &\underset{x\to 1}{=} y_\lambda(x) + y_\lambda'(x)(x-1) + \frac{y_\lambda''(x)}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)\\
&\underset{x\to 1}{=} \lambda\sqrt{2}+\left(1+\frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\right)(x-1)+\frac{\lambda\sqrt{2}}{8}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).
\end{aligned}$$

(c) L'écart entre la courbe et la tangente est mesuré par $\dfrac{\lambda\sqrt{2}}{8}(x-1)^2$ (sauf quand $\lambda = 0$ mais dans ce cas y_λ est une fonction affine donc la courbe est confondue avec la tangente), dont le signe dépend évidemment de celui de λ :

Lorsque $\lambda > 0$ la courbe sera au-dessus de la tangente au voisinage de 1 , si $\lambda < 0$ elle sera en-dessous.

Commentaires: *L'écart entre la courbe et sa tangente en 1 se mesure par rapport à la valeur de $(x-1)^2 \underset{x\to 1}{=} o(1)$ et non par celle de $x^2 \underset{x\to 1}{\sim} 1$.*

En particulier, il est très rare que cela représente un quelconque intérêt de développer les termes $(x-a)^k$ dans les formules de Taylor au voisinage de a.

5 On va, comme à notre habitude, poser $X = \dfrac{1}{x}$. Dans un voisinage de $+\infty$, on peut supposer $X > 0$ et on a :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{1}{X} - 1 + \lambda\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}\\
&= \frac{1}{X} - 1 + \frac{\lambda}{X}\sqrt{1+X^2},\ X>0\\
&\underset{X\to 0}{=} \frac{1}{X} - 1 + \frac{\lambda}{X}\left(1+\frac{1}{2}X^2 + o\left(X^2\right)\right)\\
&\underset{X\to 0}{=} \frac{1+\lambda}{X} - 1 + \frac{\lambda}{2}X + o\left(X\right)\\
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} (1+\lambda)x - 1 + \frac{\lambda}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On élimine le cas où $\lambda = 0$: la fonction est alors affine et confondue avec son asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

Pour $\lambda \neq 0$, la droite d'équation $y = (1+\lambda)x - 1$ est asymptote oblique (horizontale dans le cas où $\lambda = -1$) à $\mathcal{C}_\lambda$.

La position relative de la courbe et de son asymptote est mesurée par

$$f(x) - ((1+\lambda)x - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{2x}$$

La courbe sera au-dessus de son asymptote lorsque $\lambda > 0$ et en-dessous lorsque $\lambda < 0$ (le tout au voisinage de $+\infty$ bien entendu).

En $-\infty$, le raisonnement est identique si ce n'est que la mise en facteur initiale par X dans la racine carrée fait apparaître un terme négatif.

D'où,

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X} - 1 - \frac{\lambda}{X}\sqrt{1+X^2} \underset{X\to 0}{=} \frac{1-\lambda}{X} - 1 - \frac{\lambda}{2X} + o\left(\frac{1}{X}\right) \underset{x\to+\infty}{=} (1-\lambda)x - 1 - \frac{\lambda}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il y a donc toujours une asymptote oblique (horizontale si $\lambda = 1$) d'équation $y = (1-\lambda)x - 1$, et $\mathcal{C}_\lambda$ sera située au-dessus de son asymptote si $\lambda < 0$ et en-dessous si $\lambda > 0$ au voisinage de $-\infty$.

6 On connait déjà les asymptote horizontales et obliques pour chacune des trois courbes (dont l'une est une droite).

Il ne manque que les variations de y_1 et y_{-1} données par le signe de la dérivée

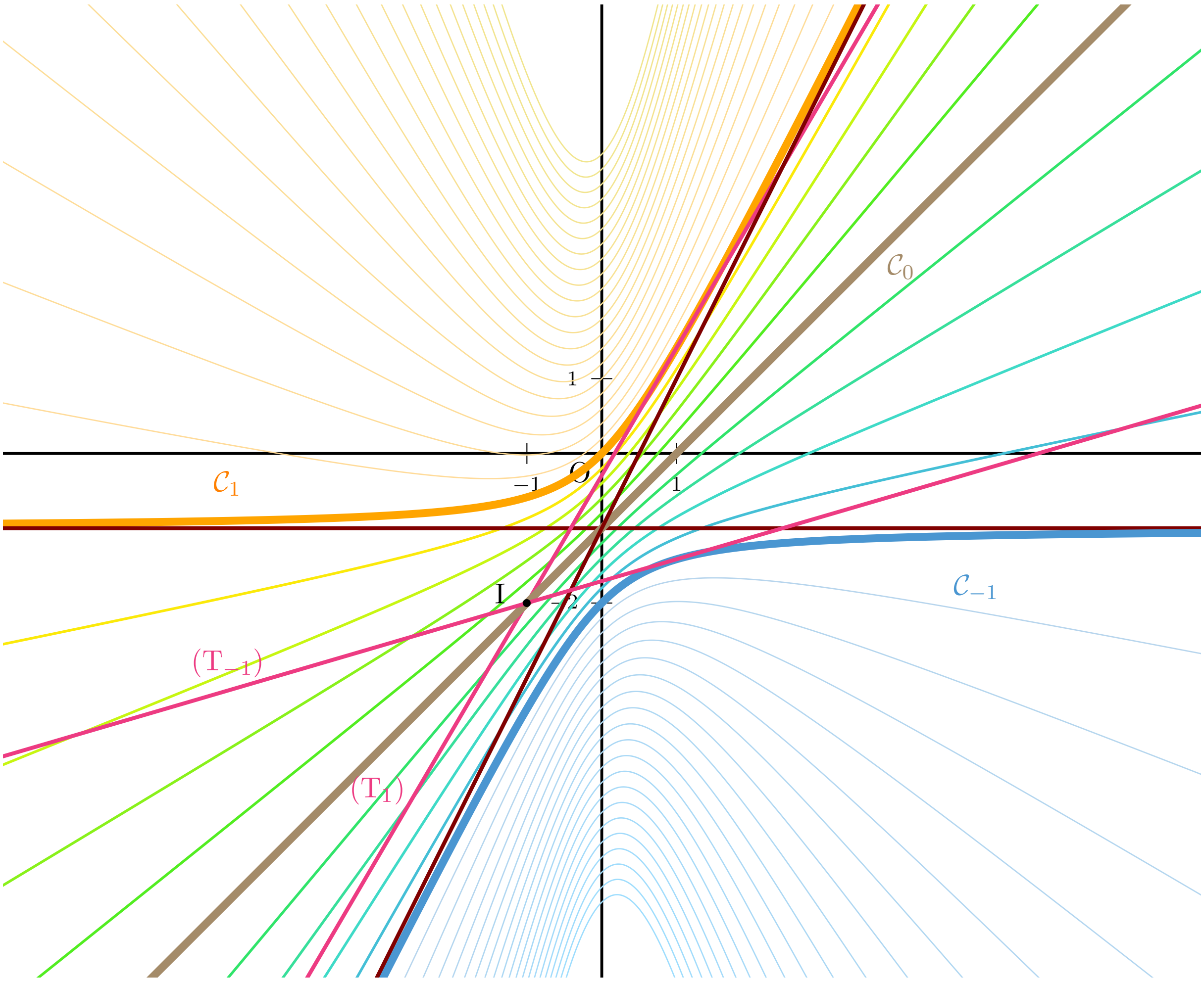
$$y_1'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 0 \text{ car } \sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x.$$

La fonction y_1 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le même argument (avec un x à la place du $-x$) prouve que y_{-1} est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ci-dessous, les 3 courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_{-1}$ ainsi que les deux asymptotes et les deux tangentes en 1 qui se coupent en I.

En plus fin, figure la famille des $\mathcal{C}_\lambda$ pour $\lambda \in [-5\,;5]$.



$\mathcal{C}_0$
1
-1
O
1
$\mathcal{C}_1$
$\mathcal{C}_{-1}$
I
-2
(T_{-1})
(T_1)