# Analyse asymptotique & Géométrie du plan

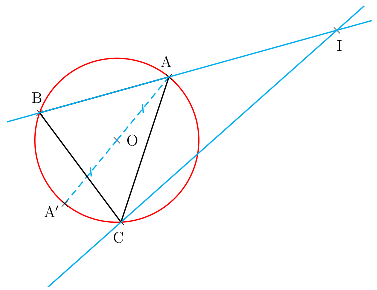
**Exercice 1 :** On considère l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ du plan vérifiant l'équation :

$$x^2 + 2(2m+1)x + y^2 - 2my + 4m + 1 = 0.$$

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^*, \mathcal{C}_m$ est un cercle dont on précisera le centre $\Omega_m$ et le rayon $\mathrm{R}_m$. Que vaut $\mathcal{C}_0$ ?
2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}, \mathrm{A}(-1;0) \in \mathcal{C}_m$ puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) en $\mathcal{C}_m$ passant par A. Donner également une équation réduite de T. Qu'y a-t-il de remarquable dans ce résultat ?
3. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{R}^*, \Omega_m$ appartient à une droite $(\Delta)$ dont on donnera une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique.
4. Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_{-1}$ avec $(\Delta)$.
5. En vous aidant des informations ci-dessus, représenter la famille de cercles $\mathcal{C}_m$ dans le plan.

**Exercice 2 :** Soient A, B et C trois points distincts du plan.

On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon. Soit A′ le symétrique de A par rapport à O.




1. Montrer que $\mathrm{N} \in \mathcal{C}(\mathrm{O};\mathrm{R}) \iff \overrightarrow{\mathrm{NA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NA'}} = 0$.
2. Soit $\mathrm{I} \in (\mathrm{AB})$. Montrer alors que $\overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IA'}}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \mathrm{IO}^2 - \mathrm{R}^2$.

Ainsi, on a montré que le nombre $\overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}}$ ne dépend pas des points A et B.

4. Application. Soit $\mathrm{D} \in (\mathrm{IC})$.

   Montrer que si $\overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \overrightarrow{\mathrm{IC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ID}}$ alors $\mathrm{D} \in \mathcal{C}(\mathrm{O};\mathrm{R})$.





**Exercice 3 :** On se place dans le plan P muni du repère usuel $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soit $\mathrm{R} \in \mathbb{R}^*$.

On note $f$ l'application du plan dans lui même qui à tout point M, distinct de O, associe le point M′ vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM'}} = \mathrm{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{M'} \in (\mathrm{OM}).$$

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$ celles de M′.

On identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ et on cherche donc à obtenir l'expression explicite de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}). \end{array}$$

1. Montrer que $(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$ vérifie :

$$\begin{cases} x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} = \mathrm{R}^2 \\ x\mathrm{Y} - y\mathrm{X} = 0 \end{cases}$$

2. Obtenir alors l'expression explicite de $(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$ en fonction de $(x\,;y)$ et R.
3. Montrer que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 \neq 0$.
4. De même, montrer que $(x\,;y) = \dfrac{1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}\left(\mathrm{XR}^2, \mathrm{YR}^2\right)$.
5. Soit $\mathrm{C}_\lambda = \left\{\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathscr{P} \,/\, (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2\right\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

   Vérifier que $\mathrm{C}_\lambda$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
6. On note $f\,(\mathrm{C}_\lambda) = \{\mathrm{M'}\,(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}) \in \mathscr{P} \,/\, \mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathrm{C}_\lambda\}$.

   Montrer que $f\,(\mathrm{C}_\lambda) = \left\{\mathrm{M'}\,(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}) \in \mathscr{P} \,/\, 2\lambda\mathrm{X} - \mathrm{R}^2 = 0\right\}$ puis que cet ensemble est une droite dont on précisera un point et un vecteur directeur.
7. On note $\mathrm{D} = \{\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathscr{P} \,/\, x + y + 1 = 0\}$.

   Vérifier que D est une droite et la caractériser.
8. On note $f(\mathrm{D}) = \{\mathrm{M'}\,(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}) \in \mathscr{P} \,/\, \mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathrm{D}\}$.

   Vérifier que $f(\mathrm{D})$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre.