Géométrie du plan

Exercice 1 :

1. $x^2+2(2m+1)x+y^2-2my+4m+1=0 \iff \left(x+(2m+1)\right)^2+(y-m)^2=5m^2$.

   On reconnaît alors un cercle de centre $\Omega_m\,(-2m-1\,;m)$ et de rayon $R_m=|m|\sqrt{5}$.

   Pour $m=0$, $\mathcal{C}_0$ est le cercle de rayon 0 et de centre $(-1\,;0)$ c'est à dire le point $(-1\,;0)$.

2. Pour tout réel m, $(-1)^2+2(2m+1)(-1)+0^2-2m\times 0+4m+1=0$ ce qui prouve que pour tout réel $m\neq 0$, $A\in\mathcal{C}_m$.

   On sait aussi que $A\in\mathcal{C}_0$.

   Pour la tangente, $M\,(x\,;y)\in(T) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega_m}=0$.

   Or, $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A\Omega_m}=\begin{pmatrix} -2m \\ m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $m\neq 0$. Donc,

   $$(T):\ -2x+y-2=0 \iff y=2x+2.$$

   L'équation de (T) est indépendante de m donc (T) est tangente à tous les cercles $\mathcal{C}_m$ en A.

3. D'après la question précédente, Ω_m appartient à la perpendiculaire à T passant par A que l'on note donc (Δ).

   C'est la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne est :

   $$(\Delta):\ \left[\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{n}\right]=0 \iff x+2y+1=0.$$

   (Δ) est aussi la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique est donc :

   $$\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

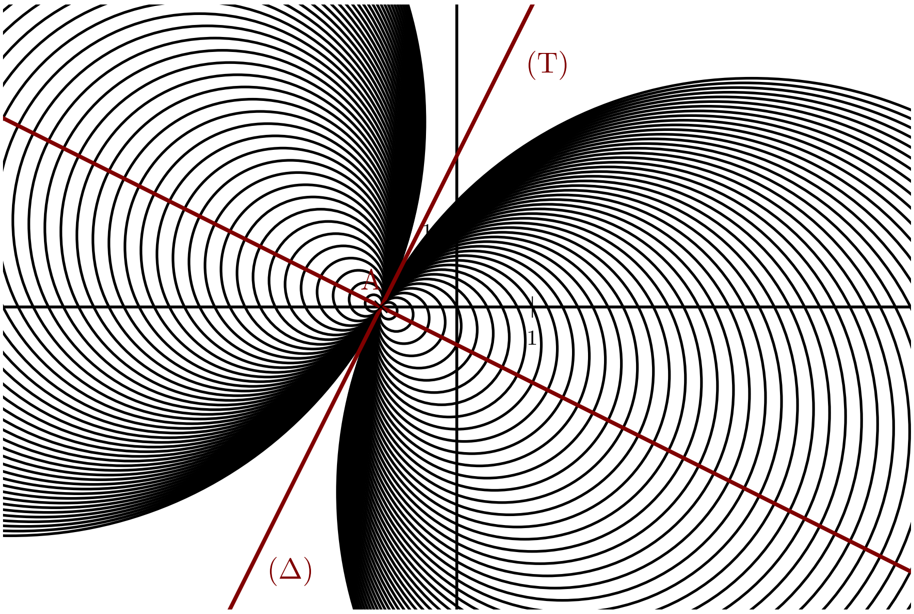
4. $\mathcal{C}_{-1}$ a pour équation : $x^2-2x+y^2+2y-3=0$.

   L'intersection de $\mathcal{C}_{-1}$ avec (Δ) s'obtient donc, à l'aide de la question précédente, en résolvant le système :

   $$\begin{cases} x^2-2x+y^2+2y-3=0 \\ x=-2t-1 \\ y=t \end{cases} \iff \begin{cases} (-2t-1)^2-2(-2t-1)+t^2+2t-3=0 \\ x=-2t-1 \\ y=t \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} t(5t+10)=0 \\ x=-2t-1 \\ y=t \end{cases} \iff \begin{cases} t=0 \ \text{ ou } \ t=-2 \\ x=-2t-1 \\ y=t \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} A\,(-1\,;0) \\ \text{ou} \\ B\,(3\,;-2)\,. \end{cases}$$



Exercice 2 :

1. Il suffit d'appliquer la relation de Chasles et la linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NA'}=0 &\iff (\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OA})\cdot\left(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OA'}\right)=0\\ &\iff NO^2+\overrightarrow{NO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}\right)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=0\\ &\iff NO^2+\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{0}-R^2=0\\ &\iff NO=R\\ &\iff N\in\mathcal{C}\end{aligned}$$

2. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}\cdot\left(\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{A'B}\right)=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{A'B}$.

   Or, le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$.

   Les droites (AB) et $(A'B)$ sont donc orthogonales d'après la question précédente.

   Le point I étant un élément de la droite (AB), on en déduit que $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{A'B}=0$ et ainsi que $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}$.

3. Poursuivons les calculs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}=(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA})\cdot\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA'}\right)&=IO^2+\overrightarrow{IO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}\right)-R^2\\ &=IO^2+\overrightarrow{IO}\cdot\overrightarrow{0}-R^2=IO^2-R^2.\end{aligned}$$

   Ainsi, on a montré que le nombre $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$ ne dépend pas des points A et B.

4. On suppose que $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}$ et on veut montrer que le point D appartient au cercle $\mathcal{C}$.

   On note $C'\in(IC)\cap\mathcal{C}$. Alors $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IC'}=IO^2-R^2=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$ d'après la relation précédente.

   Par conséquent, $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IC'}=\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}\iff\overrightarrow{IC}\cdot\left(\overrightarrow{IC'}-\overrightarrow{ID}\right)=0\iff\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{DC'}=0$.

   Or, $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{DC'}=\pm IC\times DC'$.

   Comme $IC\neq 0$ on en déduit que $DC'=0$ et ainsi $D=C'$. Le point D appartient donc au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 3 :

1 Le point M′ vérifie

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=R^2\\ M'\in(OM)\end{cases}\iff\begin{cases}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=R^2\\ \det\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)=0\end{cases}\iff\begin{cases}xX+yY=R^2\\ xY-yX=0.\end{cases}$$

2 Reprenons le système précédent :

$$\begin{cases}xX+yY=R^2 & (L_1)\\ yX-xY=0. & (L_2)\end{cases}\underset{\substack{L_1\leftarrow xL_1+yL_2\\ L_2\leftarrow yL_1-xL_2}}{\iff}\begin{cases}(x^2+y^2)X=xR^2\\ (x^2+y^2)Y=yR^2\end{cases}$$

Comme $(x\,;y)\neq(0\,;0)\implies x^2+y^2\neq 0$, on obtient :

$$\iff\begin{cases}X=\dfrac{xR^2}{x^2+y^2}\\ Y=\dfrac{yR^2}{x^2+y^2}\end{cases}\tag{XIX.1}$$

3 D'après la question précédente, comme $R\in\mathbb{R}^*$, on a : $X^2+Y^2=\dfrac{R^4}{x^2+y^2}\neq 0$.

4 Reprenons le système (XIX.1) :

$$\begin{cases}X=\dfrac{xR^2}{x^2+y^2}\\ Y=\dfrac{yR^2}{x^2+y^2}\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{X(x^2+y^2)}{R^2}\\ y=\dfrac{Y(x^2+y^2)}{R^2}\end{cases}\quad\text{avec } x^2+y^2=\dfrac{R^4}{X^2+Y^2}$$

$$\iff\begin{cases}x=\dfrac{XR^2}{X^2+Y^2}\\ y=\dfrac{YR^2}{X^2+Y^2}\end{cases}\tag{XIX.2}$$

5 En posant $O(\lambda\,;0)$, $M\in C_\lambda\iff O_\lambda M=|\lambda|$.

L'ensemble C_λ est donc le cercle de centre $O_\lambda(\lambda,0)$ et de rayon $|\lambda|$.

6 Soit $M'(x\,;y)$. Alors $M(x\,;y)\in C_\lambda$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}(x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2 &\iff x^2-2\lambda x+\lambda^2+y^2=\lambda^2\\
&\iff\left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right)^2-2\lambda\left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right)+\lambda^2+\left(\frac{YR^2}{X^2+Y^2}\right)^2=\lambda^2\\
&\iff\left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right)^2-2\lambda\left(\frac{XR^2}{X^2+Y^2}\right)+\left(\frac{YR^2}{X^2+Y^2}\right)^2=0\\
&\iff X^2R^4-2\lambda XR^2\left(X^2+Y^2\right)+Y^2R^4=0\quad\text{et } R\neq 0\\
&\iff X^2R^2-2\lambda X\left(X^2+Y^2\right)+Y^2R^2=0\\
&\iff R^2\left(X^2+Y^2\right)-2\lambda X\left(X^2+Y^2\right)=0\\
&\iff\left(X^2+Y^2\right)\left(R^2-2\lambda X\right)\quad\text{et } X^2+Y^2\neq 0\\
&\iff 2\lambda X-R^2=0\end{aligned}$$

Donc, $f(C_\lambda)=\left\{M'(X\,;Y)\in\mathscr{P}\,/\,2\lambda X-R^2=0\right\}$. C'est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point de coordonnées $\left(\dfrac{R^2}{2\lambda}\,;0\right)$, $\lambda\neq 0$.

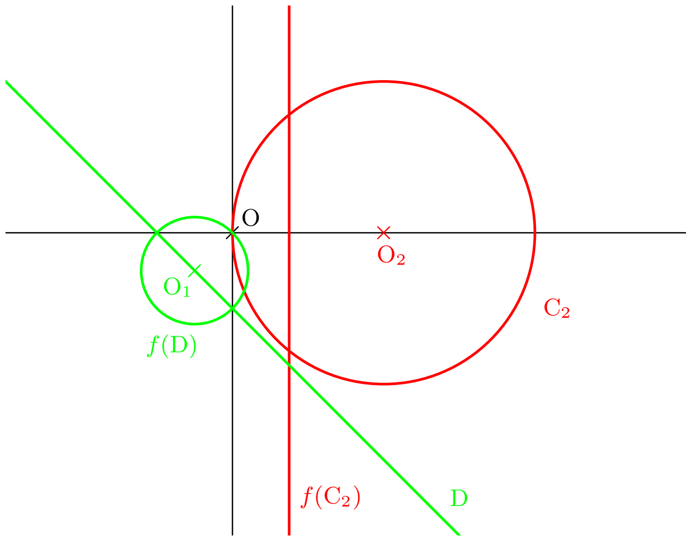
7 $M(x\,;y) \in D \iff (x\,;y) = (-1,0) + y(-1,1)$.

Ainsi, D est la droite passant par $A(-1\,;0)$ et dirigée par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8 Avec (XIX.2), on a :

$$\begin{aligned}
(X\,;Y) \in f(D) &\iff \frac{R^2X}{X^2+Y^2} + \frac{R^2Y}{X^2+Y^2} + 1 = 0 \quad \text{et } X^2+Y^2 \neq 0 \\
&\iff R^2X + R^2Y + X^2 + Y^2 = 0 \\
&\iff \left(X + \frac{R^2}{2}\right)^2 - \frac{R^4}{4} + \left(Y + \frac{R^2}{2}\right)^2 - \frac{R^4}{4} = 0 \\
&\iff \left(X + \frac{R^2}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{R^2}{2}\right)^2 = \frac{R^4}{4}.
\end{aligned}$$

On reconnait une équation cartésienne du cercle de centre $\left(-\frac{R^2}{2}\,;-\frac{R^2}{2}\right)$ et de rayon $\frac{R^2}{\sqrt{2}}$.



Commentaires: *Cette application f est appelée* inversion. *Elle permet de transformer une droite en cercle, ou un cercle en droite.*

Ce principe a permis de justifier le dispositif de Peaucellier-Lipkin, qui est un système articulé permettant de transformer un mouvement rectiligne en mouvement circulaire, et vice-versa.