Analyse asymptotique

Une seule réponse exacte par question.

1 Quelle est la limite de $\dfrac{4^n - 3^n}{2^n - 1}$?

a ☑ $+\infty$ b ☐ 2 c ☐ 1 d ☐ 2^n

2 Si $x_n = 2^n$ et $y_n = n$ alors on peut dire que

a ☐ $x_n = \mathrm{o}(y_n)$ b ☑ $y_n = \mathrm{o}(x_n)$ c ☐ $x_n \sim y_n$ d ☐ $x_n = \mathrm{O}(y_n)$

3 Quelle est la limite de $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}$?

a ☐ 0 b ☑ $\dfrac{1}{2}$ c ☐ $\sqrt{n}$ d ☐ $+\infty$

4 Laquelle des suites suivantes n'est pas négligeable devant la suite $(2n + \sqrt{n})$?

a ☐ $(\sqrt{n})$ b ☐ $(\ln n)$ c ☑ (n) d ☐ $\left(\dfrac{1}{n}\right)$

5 Soient (x_n) et (y_n) deux suites strictement positives négligeables devant une suite strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Laquelle des suites suivantes n'est pas forcément négligeable devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

a ☐ $x + y$ b ☑ xy c ☐ $x - y$ d ☐ $\sqrt{xy}$

6 Soit $u_n = \dfrac{\ln(2n)}{n}$. Alors u_n est équivalente à

a ☐ 0 b ☐ $\dfrac{1}{n}$ c ☑ $\dfrac{\ln n}{n}$ d ☐ $\ln(2n)$

7 Soit $u_n = \dfrac{e^{n+1}}{n+1}$. Un équivalent simple de u_n est

a ☐ e^n b ☐ $\dfrac{e^n}{n}$ c ☐ $\dfrac{e^n}{n+1}$ d ☑ $\dfrac{e^{n+1}}{n}$

8 Si x et y sont deux suites réelles telles que $x_n \sim n+1$ et $y_n \sim n$ alors

a ☐ $x_n - y_n \sim 0$ b ☐ $x_n - y_n \sim 1$ c ☐ $x_n - y_n \to +\infty$

d ☑ on ne peut pas donner d'équivalent de $x_n - y_n$

9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle équivalente à $(n+1)$. Laquelle des suites suivantes n'est pas équivalente à u_n ?

(a) ☐ $\dfrac{n^2+1}{n}$ (b) ☐ n (c) ☑ $\ln(1+n)$ (d) ☐ $n-1$

10 Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

(a) ☐ $u_{n+1}-u_n \to 0$ (b) ☐ $u_{n+1} \sim u_n$ (c) ☑ $u_n \sim 1$ (d) ☐ $u_n = \mathrm{o}(n)$

11 Lequel des développements asymptotiques suivants permet de dire que e^{u_n} est équivalent à e^n ?

(a) ☐ $u_n = n + \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$
(b) ☐ $u_n = n + \mathrm{o}(n)$
(c) ☑ $u_n = n + \mathrm{o}(1)$
(d) ☐ $u_n = n + \ln n + \mathrm{o}(\ln(n))$

12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 1. Alors la suite (u_n^n)

(a) ☐ tend aussi vers 1
(b) ☐ converge vers 0
(c) ☐ diverge vers $+\infty$
(d) ☑ est une forme indéterminée.

13 Quelle est la limite de $n^{1/n}$?

(a) ☐ 0 (b) ☑ 1 (c) ☐ e (d) ☐ $+\infty$

14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(a) ☐ (u_{n+1}) (b) ☑ $(1+u_n)$ (c) ☐ $2u_n$ (d) ☐ $\sqrt{u_n}$

15 Laquelle des suites suivantes vérifie $u_{n+1} \sim u_n$?

(a) ☐ $(n!)$ (b) ☐ (2^n) (c) ☐ (n^n) (d) ☑ (n^2)

16 Comment se classent les suites $a_n = 2^{n^2}$, $b_n = n^{2^n}$ et $c_n = 2^{n^n}$ pour la relation de négligeabilité ?

(a) ☑ $a_n \ll b_n \ll c_n$
(b) ☐ $b_n \ll a_n \ll c_n$
(c) ☐ $a_n \ll c_n \ll b_n$
(d) ☐ $c_n \ll a_n \ll b_n$

17 Si $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ alors $f^2(x)$ admet comme développement limité :

(a) ☐ $1 + 2x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
(b) ☑ $1 + 2x + 3x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
(c) ☐ $1 + 2x + 4x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
(d) ☐ $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$

18 Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est

- (a) ☐ $1/2$
- (b) ☐ 3
- (c) ☐ 9
- (d) ☑ 18

19 En 0, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1+x} - 1$ est équivalente à

- (a) ☑ $\dfrac{x}{3}$
- (b) ☐ $\sqrt[3]{x}$
- (c) ☐ x
- (d) ☐ $3x$

20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 en 1 est

- (a) ☐ $f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2}f''(1)$
- (b) ☐ $(x-1)\left(f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2}f''(1)\right)$
- (c) ☑ $f(1) + (x-1)f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2}f''(1)$
- (d) ☐ $f(x) + (x-1)f'(x) + \dfrac{(x-1)^2}{2}f''(x)$

21 Si en 0 on a $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $g(x) = 2x + \mathrm{o}\left(x\right)$, alors $f+g$ admet pour développement limité

- (a) ☐ $1+3x+\mathrm{o}\left(x^2\right)$
- (b) ☑ $1+3x+\mathrm{o}\left(x\right)$
- (c) ☐ $1+3x+\mathrm{o}\left(x^2\right)+\mathrm{o}$
- (d) ☐ $1+3x+\mathrm{o}\left(x^{3/2}\right)$

22 Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{3/2}$ est

- (a) ☐ $1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{15}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- (b) ☑ $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- (c) ☐ $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- (d) ☐ $1 + \dfrac{3}{2}x + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

23 Laquelle des fonctions suivantes n'admet pas de développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 1 ?

- (a) ☐ $x \mapsto \sqrt{x}$
- (b) ☐ $x \mapsto \ln x$
- (c) ☐ $x \mapsto \sin x$
- (d) ☑ $x \mapsto \arcsin x$

24 Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f est, au voisinage de 0, au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$?

- (a) ☐ $f(x) = 1 - x + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$
- (b) ☑ $f(x) = 1 - x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
- (c) ☐ $f(x) = 1 - x + \mathrm{o}\left(x\right)$
- (d) ☐ $f(x) = 1 - x - x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

25 Parmi les $2n+1$ coefficients du développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de $\sqrt{1+x}$, combien sont positifs ?

- (a) ☐ un seul
- (b) ☐ n
- (c) ☑ $n+1$
- (d) ☐ tous

26 Laquelle des fonctions suivantes n'est pas majorée par x^2 au voisinage de 0 ?

- (a) ☐ $x \mapsto \ln(1+x^2)$
- (b) ☐ $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - 1$
- (c) ☑ $x \mapsto 1 - \cos 2x$
- (d) ☐ $x \mapsto (\sin x)^2$

27 La limite en 0 de $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$ vaut

(a) ☑ -2 (b) ☐ 0 (c) ☐ 1 (d) ☐ $+\infty$

28 Au voisinage de 0, la fonction $\mathrm{ch}(x) - \cos(x)$ est

(a) ☑ positive
(b) ☐ négative
(c) ☐ positive pour $x \geqslant 0$ et négative pour $x \leqslant 0$
(d) ☐ négative pour $x \geqslant 0$ et positive pour $x \leqslant 0$

29 Considérons la fonction polynomiale $\mathrm{P}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Au voisinage de zéro, on a $\mathrm{P}(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ si et seulement si

(a) ☐ $a = b = 0$ (b) ☑ $a = b = c = 0$ (c) ☐ $a = b = c = d =$ (d) ☐ $c = d = 0$

30 Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f admet en 0 un point d'inflexion ?

(a) ☐ $f(x) = x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ (c) ☑ $f(x) = x - x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$
(b) ☐ $f(x) = x + \mathrm{o}(x)$ (d) ☐ $f(x) = x - x^2 + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$

31 Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \cos x}{\sin x}$ on a besoin

(a) ☑ du DL_4 de cos et du DL_5 de sin (c) ☐ du DL_3 de cos et du DL_4 de sin
(b) ☐ du DL_5 de cos et du DL_5 de sin (d) ☐ du DL_3 de cos et du DL_5 de sin