Calcul matriciel et Systèmes linéaires

Une seule réponse exacte par question.

1 Soient A et B deux matrices de tailles respectives 4×3 et 3×2. Alors le produit AB

a ☐ est de taille 3×3
b ☐ est de taille 4×2
c ☐ est de taille 12×6
d ☐ n'a pas de sens

2 Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$?

a ☐ $2E_{11}$
b ☐ $2E_{22}$
c ☐ $E_{12} + E_{21}$
d ☐ $E_{11} + E_{22}$

3 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ vaut :

a ☐ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
b ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
c ☐ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
d ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

4 Laquelle des matrices suivantes vérifie $M^2 = -I_2$?

a ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
c ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
d ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5 La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

a ☐ A est triangulaire supérieure
b ☐ $c = 0$ et $a = d$
c ☐ $a = c = d = 0$
d ☐ $b = 0$

6 Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice carrée A soit aussi diagonale ?

a ☐ ${}^t\!A$ est diagonale
b ☐ $A - I$ est diagonale
c ☐ A^2 est diagonale
d ☐ $2A$ est diagonale

7 Si A est une matrice carrée, $({}^t\!A)A$ est toujours

a ☐ triangulaire supérieure
b ☐ diagonale
c ☐ symétrique
d ☐ antisymétrique

8 Si A, B sont deux matrices carrées inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'inverse de ${}^t(AB)$ est toujours

a) ☐ ${}^t(A^{-1})\,{}^t(B^{-1})$
b) ☐ ${}^t(B^{-1})\,{}^t(A^{-1})$
c) ☐ $B^{-1}A^{-1}$
d) ☐ $A^{-1}B^{-1}$

9 Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, son inverse est

a) ☐ triangulaire supérieure
b) ☐ triangulaire inférieure
c) ☐ symétrique
d) ☐ une telle matrice n'est jamais inversible

10 L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

a) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$
c) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

11 On calcule tous les produits $E_{12}E_{ij}$. Combien de ces produits sont nuls ?

a) ☐ n
b) ☐ $n^2 - n$
c) ☐ n^3
d) ☐ aucun car E_{12} est non nulle

12 Si M est une matrice carrée telle que ${}^tM = 2M$, alors

a) ☐ les coefficients diagonaux de M son nuls
b) ☐ M est une matrice diagonale
c) ☐ M est une matrice symétrique
d) ☐ M est nulle

13 Combien de matrices E_{ij} commutent avec E_{11} ?

a) ☐ 1
b) ☐ $(n-1)^2$
c) ☐ $(n-1)^2 - 1$
d) ☐ n^2

14 Le rang d'une matrice A de taille $n \times p$ est

a) ☐ le nombre de colonnes non nulles de A
b) ☐ inférieur au nombre de colonnes non nulles de A
c) ☐ supérieur au nombre de colonnes non nulles de A
d) ☐ n moins le nombre de colonnes non nulles de A

15 Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule BA avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela revient à opérer sur A :

a) ☐ $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$
b) ☐ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$
c) ☐ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
d) ☐ $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$

16 Par des opérations élémentaires sur les lignes de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, laquelle des matrices suivantes ne peut-on pas obtenir ?

a ☐ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

d ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

17 L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ est

a ☐ $\{(1,0,0)\}$

c ☐ $\{(1-t,t,t), t \in \mathbb{R}\}$

b ☐ $\{(0,0,1)\}$

d ☐ $\{(2-t,1+t,t), t \in \mathbb{R}\}$

18 Soit S le système linéaire $AX = B$ où A est une matrice carrée de taille n. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que S est un système de Cramer ?

a ☐ $\mathrm{rg}\ A = n$

b ☐ A est triangulaire supérieure

c ☐ il existe B_0 tel que le système $AX = B_0$ ait une unique solution

d ☐ le système homogène $AX = 0$ admet une unique solution