Fonction de la variable réelle - BILAN

Une seule réponse exacte par question.

I GÉNÉRALITÉS

1 La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est

- a ☑ paire
- b ☐ impaire
- c ☐ paire et impaire
- d ☐ ni paire ni impaire

2 La plus petite période positive de la fonction $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ est

- a ☐ 2π
- b ☑ π
- c ☐ $\cos(2\pi)$
- d ☐ f n'est pas périodique

3 SI f et g sont croissantes, alors $f - g$ est

- a ☐ croissante
- b ☐ décroissante
- c ☐ monotone
- d ☑ n'est pas obligatoirement monotone

4 Une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$

- a ☐ est toujours majorée
- b ☑ est toujours minorée
- c ☐ tend vers $+\infty$ en $+\infty$
- d ☐ est continue sur $\mathbb{R}_+$

5 Si f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, la fonction $\max(f, g)$

- a ☐ est égale à f
- b ☐ est égale à g
- c ☑ est la fonction $x \mapsto |x|$
- d ☐ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

6 Quelle condition est suffisante pour dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée sur $\mathbb{R}$?

- a ☑ f est majorée sur $[n, n+1]$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$
- b ☐ f est périodique
- c ☐ f est croissante et tend vers 0 en $+\infty$
- d ☐ f est impaire et majorée sur $\mathbb{R}_+$

7 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction quelconque, laquelle des fonctions suivantes n'est pas nécessairement paire ?

- a ☐ $x \mapsto f\left(x^2\right)$
- b ☑ $x \mapsto f(x)^2$
- c ☐ $x \mapsto f(x)f(-x)$
- d ☐ $x \mapsto f(\cos x)$

8 Soit f strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

ⓐ ☐ $x \mapsto f(f(x))$
ⓑ ☐ $x \mapsto -f(x)$
ⓒ ☐ $x \mapsto f(-x)$
ⓓ ☑ $x \mapsto f(x^2)$

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de plus petite période $T > 0$. Alors T^2 est une période de f,

ⓐ ☐ si et seulement si $T = 1$
ⓑ ☑ si et seulement si T est un entier
ⓒ ☐ pour tout T
ⓓ ☐ pour aucune valeur de T

II LIMITES ET CONTINUITÉ

10 Quelles sont les limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ de $x \mapsto \exp\left(-e^{-x}\right)$?

ⓐ ☐ 1 et 0
ⓑ ☑ 0 et 1
ⓒ ☐ $+\infty$ et 0
ⓓ ☐ 0 et $+\infty$

11 Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto \dfrac{ex}{x}$

ⓐ ☑ tend vers 1
ⓑ ☐ tend vers 0
ⓒ ☐ tend vers $+\infty$
ⓓ ☐ n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$

12 Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^{1/x}$ tend vers

ⓐ ☐ 0
ⓑ ☑ 1
ⓒ ☐ e
ⓓ ☐ $+\infty$

13 Laquelle des conditions suivantes est **suffisante** pour que f soit continue en 0 ?

ⓐ ☑ $|f(x)| \leqslant |x|$ pour tout x dans $[-1, 1]$
ⓑ ☐ $f(x) \leqslant x$ pour tout x dans $[-1, 1]$
ⓒ ☐ la suite $(f(1/n))$ converge vers $f(0)$
ⓓ ☐ f est croissante sur $[-1, 1]$

14 Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tend vers 3 à droite en 0 si

ⓐ ☑ $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, 0 < x < \eta \implies |f(x) - 3| \leqslant \epsilon$
ⓑ ☐ $\forall \epsilon \geqslant 0, \exists \eta \geqslant 0, 0 < x < \eta \implies |f(x) - 3| \leqslant \epsilon$
ⓒ ☐ $\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, 0 < x < \eta \implies |f(x) - 3| \leqslant \epsilon$
ⓓ ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, 0 < x < \epsilon \implies |f(x) - 3| \leqslant \eta$

15 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et qui tend vers 0 à droite en 0.

Alors on peut trouver un intervalle $[0, \eta]$ avec $\eta > 0$, sur lequel

ⓐ ☐ $f(x) \leqslant x$
ⓑ ☑ $f(x) \leqslant 1 - x$
ⓒ ☐ f est décroissante
ⓓ ☐ f est nulle

16 Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$ telles que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1 quand x tend vers 0.

Alors on peut trouver $\eta > 0$ tel que sur $[-\eta, \eta]$

- (a) ☐ $f(x) = g(x)$
- (b) ☑ f et g ont le même signe
- (c) ☐ f et g ont le même sens de variation
- (d) ☐ f et g sont continues

17 Pour quelles valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^\alpha \, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ admet-elle une limite finie à droite en 0 ?

- (a) ☐ $\alpha > 1$
- (b) ☑ $\alpha \geqslant 1$
- (c) ☐ $\alpha > 0$
- (d) ☐ pour tout réel α

18 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère :

A l'assertion « $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ » ;

B l'assertion « la suite $(f(n))$ converge vers 0 ».

Alors :

- (a) ☑ A implique B
- (b) ☐ B implique A
- (c) ☐ A et B sont équivalentes
- (d) ☐ il n'y a pas d'implication entre A et B

19 Laquelle des fonctions suivantes est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

- (a) ☐ $x \mapsto \mathrm{e}x$
- (b) ☐ $x \mapsto \tan x$
- (c) ☐ $x \mapsto \arctan x$
- (d) ☑ $x \mapsto \operatorname{sh} x$

20 Le théorème des limites monotones permet de dire que

- (a) ☐ si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et négative, elle tend vers 0 en $+\infty$
- (b) ☑ si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f \leqslant 1$, alors f admet une limite finie en $+\infty$
- (c) ☐ si f est strictement positive et tend vers 0 en $+\infty$, alors elle est décroissante
- (d) ☐ si f est décroissante et tend vers 1, alors elle est minorée par 1

21 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \neq 0$. Alors on peut dire que f est soit strictement positive sur tout l'intervalle $[0, 1]$, soit strictement négative sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Quel est l'argument invoqué ?

- (a) ☑ le théorème des valeurs intermédiaires
- (b) ☐ f est bornée sur le segment $[0, 1]$
- (c) ☐ f est une bijection continue
- (d) ☐ aucun, cela serait vrai même si f n'était pas continue

22 Soit f croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ℓ la limite à droite en 0 de f. Alors

- (a) ☐ ℓ existe et vaut $f(0)$
- (b) ☑ ℓ existe et $\ell \geqslant f(0)$
- (c) ☐ ℓ existe et $\ell \leqslant f(0)$
- (d) ☐ ℓ n'existe pas forcément

23 La fonction sinus établit une bijection de

- (a) ☐ $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$
- (b) ☑ $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$
- (c) ☐ $[-\pi, \pi]$ sur $[-1, 1]$
- (d) ☐ $]0, \pi[$ sur $]0, 1[$

24 Laquelle des fonctions suivantes ne se prolonge pas par continuité en 0 ?

(a) ☑ $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$

(b) ☐ $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

(c) ☐ $x \mapsto \sqrt{x^2}$

(d) ☐ $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ 2x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

25 L'image de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par une fonction continue ne peut pas être

(a) ☐ $\mathbb{R}_-$

(b) ☐ $\mathbb{R}$

(c) ☑ $\mathbb{R}^\star$

(d) ☐ un singleton

26 Lequel des intervalles suivants ne peut pas être envoyé sur $]0,1[$ par une fonction continue ?

(a) ☑ $[0,1]$

(b) ☐ $]0,1]$

(c) ☐ $[0,1[$

(d) ☐ $]0,1[$

27 Quelle condition est **nécessaire** pour que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette une limite en $+\infty$?

(a) ☐ f est monotone et bornée au voisinage de $+\infty$

(b) ☐ f est constante au voisinage de $+\infty$

(c) ☑ $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$

(d) ☐ $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ tend vers 1 en $+\infty$

28 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère :

A l'assertion « f est strictement positive » ;

B l'assertion « f tend vers 0 en $+\infty$ » ;

C l'assertion « f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ».

Alors :

(a) ☐ (A et B) $\implies$ C

(b) ☐ (A et C) $\implies$ B

(c) ☑ (B et C) $\implies$ A

(d) ☐ B $\implies$ (A et C)

29 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Laquelle des conditions suivantes assure l'existence d'un point fixe de f (i.e. un réel x tel que $f(x) = x$) ?

(a) ☐ $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires

(b) ☐ f est strictement croissante

(c) ☑ $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$

(d) ☐ $f(0)$ et $f(1)$ sont de même signe

30 Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

Quelle condition sur I assure l'existence d'un réel $a > 0$ tel que $f(x) \geqslant a$ pour tout x de I ?

(a) ☐ C'est vrai pour tout intervalle I

(b) ☐ C'est vrai lorsque I est un intervalle borné

(c) ☑ C'est vrai lorsque I est un segment

(d) ☐ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

31 Soit f continue sur un segment $[a,b]$ avec $f(a) < f(b)$. Alors $f([a,b])$

(a) ☐ est inclus dans $[f(a), f(b)]$
(b) ☐ est égal à $[f(a), f(b)]$
(c) ☑ contient $[f(a), f(b)]$
(d) ☐ est égal à $\{f(a), f(b)\}$

32 Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f \circ f = \mathrm{I}_d$, que peut-on dire ?

(a) ☐ $f = \mathrm{I}_d$
(b) ☐ f est strictement croissante
(c) ☑ f est strictement monotone
(d) ☐ le graphe de f est symétrique par rapport à D : $y = -x$

33 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. L'ensemble E des réels x tels que $f(x) > 0$ est forcément différent de :

(a) ☐ $\mathbb{R}$
(b) ☑ $]0, 1]$
(c) ☐ $]0, 1[$
(d) ☐ $]0, 1[\cup]1, 2[$

34 Quel cas permet d'affirmer que f n'a pas de limite en 0 ?

(a) ☑ $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout x non nul
(b) ☐ $|f(x)| \leqslant |x|$ pour tout x
(c) ☐ $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour tout x non nul
(d) ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], f(x) \leqslant \epsilon^2$

35 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère :

A l'assertion « f est strictement croissante » ;

B l'assertion « f est continue » ;

C l'assertion « f est surjective ».

Alors :

(a) ☐ (A et B) $\Longrightarrow$ C
(b) ☑ (A et C) $\Longrightarrow$ B
(c) ☐ (B et C) $\Longrightarrow$ A
(d) ☐ aucune des 3 propositions ne résulte des deux autres

III Dérivabilité

36 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, la dérivée de $x \mapsto f(x)f(2x)$ est

(a) ☐ $x \mapsto f'(x)f'(2x)$
(b) ☐ $x \mapsto 2f'(x)f'(2x)$
(c) ☑ $x \mapsto f'(x)f(2x) + 2f(x)f'(2x)$
(d) ☐ $x \mapsto f'(x)f(2x) + f(x)f'(2x)$

37 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, la dérivée de $x \mapsto f(x^3)$ est

(a) ☐ $x \mapsto 3x^2 f'(3x^2)$
(b) ☐ $x \mapsto 3f'(x^3)^2$
(c) ☑ $x \mapsto 3x^2 f'(x^3)$
(d) ☐ $x \mapsto f'(x^3)$

38 L'équation de la tangente en $x = 1$ au graphe de la fonction $f : x \mapsto \ln(x + 1)$ est

(a) ☐ $y = \dfrac{1}{2}(x - 1)$
(b) ☑ $y - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$
(c) ☐ $y - \ln 2 = x - 1$
(d) ☐ $y - 1 = 2(x - \ln 2)$

39 Soit $f : x \mapsto x + x^3$. Il s'agit d'un bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur

- (a) ☑ $\mathbb{R}$
- (b) ☐ $\mathbb{R}^\star$
- (c) ☐ $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$
- (d) ☐ $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

40 La dérivée en $x \in \mathbb{R}$ de la fonction sinus est

- (a) ☑ $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
- (b) ☐ $\sin(x + \pi)$
- (c) ☐ $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$
- (d) ☐ $\sin(x + 2\pi)$

41 Si f, g, h sont trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée du produit fgh vaut

- (a) ☐ $f'g'h'$
- (b) ☐ $f'gh + fgh'$
- (c) ☑ $f'gh + fg'h + fgh'$
- (d) ☐ $f'g'h + fgh'$

42 Si f, g sont deux fonctions réelles dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(1) = g(1)$, alors

- (a) ☐ $f'(1) = g'(1)$
- (b) ☐ $f'(1) \neq g'(1)$
- (c) ☐ $f'(1) < g'(1)$
- (d) ☑ on ne peut rien dire

43 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable paire, alors f' est

- (a) ☐ paire
- (b) ☑ impaire
- (c) ☐ ni paire ni impaire
- (d) ☐ nulle

44 Soient f, g sont deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la dérivée seconde de $g \circ f$?

- (a) ☑ $f'' \times (g' \circ f) + (f')^2 \times (g'' \circ f)$
- (b) ☐ $f'' \times f' \times (g \circ f) + f' \times (g' \circ f)$
- (c) ☐ $f' \circ g' \circ f \circ f'' \circ g \circ f$
- (d) ☐ $g'' \circ f''$

45 En 0 la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ tend vers

- (a) ☐ 0
- (b) ☑ 1
- (c) ☐ $\dfrac{1}{\cos x}$
- (d) ☐ $+\infty$

46 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. En appliquant la formule de Leibniz, la dérivée seconde de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^\star$ est

- (a) ☐ $x \mapsto \dfrac{f''(x)}{x} - \dfrac{f'(x)}{x^2} + \dfrac{f(x)}{x^3}$
- (b) ☑ $x \mapsto \dfrac{f''(x)}{x} - \dfrac{2f'(x)}{x^2} + \dfrac{2f(x)}{x^3}$
- (c) ☐ $x \mapsto \dfrac{f''(x)}{x} - \dfrac{f'(x)}{x^2} + \dfrac{2f(x)}{x^3}$
- (d) ☐ $x \mapsto \dfrac{f''(x)}{x} + \dfrac{2f'(x)}{x^2} + \dfrac{f(x)}{x^3}$

47 La dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^\star$ est

- (a) ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$
- (b) ☐ $x \mapsto \left|\dfrac{1}{x}\right|$
- (c) ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{\ln|x|}$
- (d) ☑ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

48 La fonction $f : x \mapsto x + \sin x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur

- a ☐ $\mathbb{R}$
- b ☐ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- c ☑ $\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- d ☐ $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

49 Laquelle des fonctions vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x)f'(x) = 1$?

- a ☐ $x \mapsto e^{-x}$
- b ☐ $x \mapsto \ln(\ln x)$
- c ☑ $x \mapsto \sqrt{2x}$
- d ☐ $x \mapsto \tan x$

50 Pour $k \leqslant n$ la dérivée k-ième de $x \mapsto x^n$ est

- a ☑ $\dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$
- b ☐ $\dbinom{n}{k}\, x^{n-k}$
- c ☐ $k!\, x^{n-k}$
- d ☐ $(n-k)!\, x^{n-k}$

51 La dérivée de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ est

- a ☐ $x \mapsto x^{x-1}$
- b ☐ $x \mapsto x x^{x-1} = x^x$
- c ☑ $x \mapsto (1 + \ln x)x^x$
- d ☐ $x \mapsto (1 + \ln x)x^{x-1}$

52 Quelle est la dérivée en 0 de la fonction $f : x \mapsto \tan\left(1 + \sin\left(\tan x^2\right)\right)$?

- a ☑ 0
- b ☐ $\tan 1$
- c ☐ $\dfrac{\pi}{4}$
- d ☐ $1 + \tan^2 1$

53 Si f est dérivable en 0, la limite de $\dfrac{f(3h) - f(h)}{h}$, lorsque h tend vers 0 est

- a ☐ $f'(0)$
- b ☑ $2f'(0)$
- c ☐ $3f'(0)$
- d ☐ $4f'(0)$

54 Soit $n \geqslant 2$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Si on dérive n fois l'égalité $(1+x^2)f(x) = 1$, on obtient la relation

- a ☐ $(1+x^2)f^{(n)}(x) = 0$
- b ☐ $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2f^{(n-2)}(x) = 0$
- c ☐ $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(x) = 0$
- d ☑ $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$

55 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x}$ est dérivable sur

- a ☐ $\mathbb{R}$
- b ☐ $\mathbb{R}^\star$
- c ☐ $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- d ☑ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

56 Soit $f : x \mapsto (1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)$. La valeur de $f'(0)$ est

- a ☐ 1
- b ☐ $n+1$
- c ☑ $\dfrac{n(n+1)}{2}$
- d ☐ $n!$

57 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$?

- a ☐ f est strictement monotone
- b ☐ f n'a pas d'extremum local
- c ☐ f est injective
- d ☑ $x \mapsto f(x) - x$ est croissante

58 Que vaut $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \dfrac{2x}{1+x^2}$?

(a) ☐ 0
(b) ☑ 1
(c) ☐ 2
(d) ☐ $+\infty$

59 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

(a) ☑ $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$
(b) ☐ f' est strictement positive
(c) ☐ $f'(x+1) - f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$
(d) ☐ f' est 1-périodique