Suites réelles et complexes

Une seule réponse exacte par question.

1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors

- a ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est positive ou nulle
- b ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
- c ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est strictement positive
- d ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est constante à partir d'un certain rang

2 Soit I un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I qui converge.

Pour quel intervalle I est-on certain que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans I ?

a ☐ $]0,1[$ b ☐ $[0,1]$ c ☐ $[0,1[$ d ☐ $]0,+\infty[$

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

Laquelle des conditions suivantes suffit pour dire que les suites $(-u_n)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- a ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- b ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
- c ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0
- d ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 0

4 Dans quel cas le théorème d'encadrement permet-il de montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

- a ☐ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{n+1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$
- b ☐ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
- c ☐ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2n}$
- d ☐ $\forall n \geqslant 0, \quad n \leqslant u_n \leqslant n+1$

5 Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$?

a ☐ $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ b ☐ $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ c ☐ $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$ d ☐ $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

6 On pose $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Laquelle des suites suivantes converge ?

a ☐ $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ b ☐ $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ c ☐ $(u_{4n})_{n\geqslant 0}$ d ☐ $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

7 Soit $a>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ est croissante à partir d'un certain rang

- a ☐ pour tout $a>0$
- b ☐ seulement pour a dans $]0,1]$
- c ☐ seulement pour $a \geqslant 1$
- d ☐ pour aucune valeur de a

8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. On pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

a) ☐ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
b) ☐ lorsque $u_{n+1}-u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout n
c) ☐ lorsque $u_{n+1}-u_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout n
d) ☐ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

9 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que (u_n-v_n) converge, alors

a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent
b) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
c) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
d) ☐ $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1

10 Laquelle des conditions suivantes est incompatible avec le fait que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique ?

a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
b) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
c) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
d) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive

11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

a) ☐ u_n tend vers 0
b) ☐ $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0
c) ☐ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1
d) ☐ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

12 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $1-\dfrac{1}{n}<u_n<2+\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\geqslant 1$, alors

a) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [1,2]$
b) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in]1,2[$
c) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$
d) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément

13 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=n+(-1)^n$ est

a) ☐ croissante
b) ☐ décroissante
c) ☐ non monotone
d) ☐ croissante et décroissante selon la parité de n

14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout n. Alors on peut dire que

a) ☐ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1
b) ☐ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
c) ☐ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1
d) ☐ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
b) ☐ la suite extraite (u_{2n}) converge
c) ☐ la suite $(u_{n+1}-u_n)$ tend vers 0
d) ☐ la suite extraite (u_{2n}) est bornée

16 Soit $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adjacente avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors

a) ☐ pour tout n, on a $v_n > 1$
b) ☐ pour tout n, on a $v_n - u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$
c) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 1$
d) ☐ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

17 Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

a) ☐ $\left(e^{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
b) ☐ $((n+1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
c) ☐ $\left(2^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
d) ☐ $(3n)_{n\in\mathbb{N}}$

18 Lorsque t est un nombre réel, la suite définie par $u_n = e^{int}$ converge pour

a) ☐ $t = 0 \quad [2\pi]$
b) ☐ $t = 0 \quad [\pi]$
c) ☐ aucune valeur de t
d) ☐ pour tout réel t

19 Combien vaut $a + a^2 + \cdots + a^n$ lorsque a est un réel différent de 1 ?

a) ☐ $\dfrac{1-a^n}{1-a}$
b) ☐ $\dfrac{a-a^n}{1-a}$
c) ☐ $\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}$
d) ☐ $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

20 Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite définie par $u_n = 2^n + 3^n$?

a) ☐ $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$
b) ☐ $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
c) ☐ $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$
d) ☐ $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

21 Soit $u_n = 2n + 3$. Combien vaut $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$?

a) ☐ $3(n+1)^2$
b) ☐ $3n(n+1)$
c) ☐ $\dfrac{(n+1)(6n+9)}{2}$
d) ☐ $\dfrac{n(6n+9)}{2}$

22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n. Alors la suite définie par $t_n = u_n - a$ est une suite géométrique lorsque :

a) ☐ $a = 3$
b) ☐ $a = -3$
c) ☐ $a = 2$
d) ☐ $a = 0$

23 Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3$?

a) ☐ elle tend vers 1 en croissant
b) ☐ elle tend vers 1 en décroissant
c) ☐ elle tend vers 0 en décroissant
d) ☐ elle diverge vers $+\infty$ en croissant

24 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Alors on peut montrer par récurrence sur n que :

ⓐ ☐ u_n est rationnel
ⓑ ☐ $u_n > 0$
ⓒ ☐ $u_n \leqslant u_{n+1}$
ⓓ ☐ $u_n \leqslant nu_1$

25 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (avec $u_n \neq \ell$ pour tout n). Alors le quotient $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}$ tend vers

ⓐ ☐ 0
ⓑ ☐ 1
ⓒ ☐ $f'(\ell)$
ⓓ ☐ $f'(c)$ où c est compris entre ℓ et u_n

26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Alors

ⓐ ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est croissante
ⓑ ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$
ⓒ ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive donc converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc est nulle
ⓓ ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée