

Suites réelles et complexes

Une seule réponse exacte par question.

- 1** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors
- a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est positive ou nulle
 - b $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0
 - c $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est strictement positive
 - d $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et est constante à partir d'un certain rang
- 2** Soit I un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de I qui converge.
Pour quel intervalle I est-on certain que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reste dans I ?
- a $]0, 1[$
 - b $[0, 1]$
 - c $[0, 1[$
 - d $]0, +\infty[$
- 3** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive.
Laquelle des conditions suivantes suffit pour dire que les suites $(-u_n)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
 - b $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0
 - c $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0
 - d $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 0
- 4** Dans quel cas le théorème d'encadrement permet-il de montrer que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge?
- a $\forall n \geq 1, \frac{n+1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}$
 - b $\forall n \geq 1, \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$
 - c $\forall n \geq 1, \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{2n}$
 - d $\forall n \geq 0, n \leq u_n \leq n+1$
- 5** Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n \geq 0}$?
- a $(u_{3n})_{n \geq 0}$
 - b $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$
 - c $(u_{2n+2})_{n \geq 0}$
 - d $(u_{n^2})_{n \geq 0}$
- 6** On pose $u_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Laquelle des suites suivantes converge?
- a $(u_{2n})_{n \geq 0}$
 - b $(u_{3n})_{n \geq 0}$
 - c $(u_{4n})_{n \geq 0}$
 - d $(u_{n^2})_{n \geq 0}$
- 7** Soit $a > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{n!}{a^n}$ est croissante à partir d'un certain rang
- a pour tout $a > 0$
 - b seulement pour a dans $]0, 1]$
 - c seulement pour $a \geq 1$
 - d pour aucune valeur de a
- 8** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. On pose $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes

- (a) lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
- (b) lorsque $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout n
- (c) lorsque $u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout n
- (d) lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

9 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que $(u_n - v_n)$ converge, alors

- (a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent
- (b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
- (c) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\iff (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
- (d) $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq 0}$ converge vers 1

10 Laquelle des conditions suivantes est incompatible avec le fait que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit périodique ?

- (a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée
- (b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente
- (c) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante
- (d) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive

11 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

- (a) u_n tend vers 0
- (b) $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0
- (c) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1
- (d) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$

12 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $1 - \frac{1}{n} < u_n < 2 + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in [1, 2]$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in]1, 2[$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$
- (d) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas forcément

13 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n + (-1)^n$ est

- (a) croissante
- (b) décroissante
- (c) non monotone
- (d) croissante et décroissante selon la parité de n

14 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout n . Alors on peut dire que

- (a) si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1
- (b) si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
- (c) si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1
- (d) si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

15 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?

- a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée
 b la suite extraite (u_{2n}) converge
 c la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0
 d la suite extraite (u_{2n}) est bornée

16 Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adjacente avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors

- a pour tout n , on a $v_n > 1$
 b pour tout n , on a $v_n - u_n \geq \frac{1}{n}$
 c $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n > 1$
 d $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

17 Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

- a $(e^{3n})_{n \in \mathbb{N}}$
 b $((n+1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$
 c $(2^{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$
 d $(3n)_{n \in \mathbb{N}}$

18 Lorsque t est un nombre réel, la suite définie par $u_n = e^{int}$ converge pour

- a $t = 0 \quad [2\pi]$
 b $t = 0 \quad [\pi]$
 c aucune valeur de t
 d pour tout réel t

19 Combien vaut $a + a^2 + \dots + a^n$ lorsque a est un réel différent de 1 ?

- a $\frac{1 - a^n}{1 - a}$
 b $\frac{a - a^n}{1 - a}$
 c $\frac{a(1 - a^n)}{1 - a}$
 d $\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

20 Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite définie par $u_n = 2^n + 3^n$?

- a $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$
 b $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
 c $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$
 d $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

21 Soit $u_n = 2n + 3$. Combien vaut $u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$?

- a $3(n+1)^2$
 b $3n(n+1)$
 c $\frac{(n+1)(6n+9)}{2}$
 d $\frac{n(6n+9)}{2}$

22 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n . Alors la suite définie par $t_n = u_n - a$ est une suite géométrique lorsque :

- a $a = 3$
 b $a = -3$
 c $a = 2$
 d $a = 0$

23 Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3$?

- a elle tend vers 1 en croissant
 b elle tend vers 1 en décroissant
 c elle tend vers 0 en décroissant
 d elle diverge vers $+\infty$ en croissant

24 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Alors on peut montrer par récurrence sur n que :

- a u_n est rationnel
- b $u_n > 0$
- c $u_n \leq u_{n+1}$
- d $u_n \leq nu_1$

25 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ (avec $u_n \neq \ell$ pour tout n). Alors le quotient $\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}$ tend vers

- a 0
- b 1
- c $f'(\ell)$
- d $f'(c)$ où c est compris entre ℓ et u_n

26 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Alors

- a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge car elle est croissante
- b $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$
- c $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive donc converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc est nulle
- d $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée