Nombres Complexes

1 Si z est un nombre complexe, la partie réelle de $z + i\overline{z}$ est

(a) ☐ $\mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Re}\,(\overline{z})$
(b) ☑ $\mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)$
(c) ☐ $\mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{Im}\,(z)$
(d) ☐ $2\,\mathrm{Re}\,(z)$

2 Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $(z-i)(z-2i)$ est égal à

(a) ☐ $z^2 - 2$ (b) ☐ $z^2 + 2$ (c) ☑ $z^2 - 3iz - 2$ (d) ☐ $z^2 - 3iz + 2$

3 Si x est un nombre réel, la partie réelle de $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$ est

(a) ☐ $\dfrac{1}{1+x^2}$ (b) ☐ $\dfrac{1}{1-x^2}$ (c) ☑ $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (d) ☐ $\dfrac{2x}{1-x^2}$

4 Si x est un nombre réel, la partie imaginaire de $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$ est

(a) ☐ -1 (b) ☐ $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (c) ☐ $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (d) ☑ $\dfrac{2x}{1+x^2}$

5 Un argument de $1-i$ est

(a) ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ (b) ☐ $\dfrac{3\pi}{4}$ (c) ☐ $\dfrac{5\pi}{4}$ (d) ☑ $\dfrac{7\pi}{4}$

6 Soit $z = (1+i)(2+i)\cdots(n+i)$.
Lequel des nombres complexes suivants a la même partie réelle que z ?

(a) ☐ $n! + i^n$
(b) ☑ $(1-i)(2-i)\cdots(n-i)$
(c) ☐ $\mathrm{Im}\,(z)$
(d) ☐ $n!$

7 Quelle est l'inverse de $3-4i$?

(a) ☐ $\dfrac{1}{3} - \dfrac{i}{4}$ (b) ☐ $\dfrac{1}{3} + \dfrac{i}{4}$ (c) ☐ $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4i}{5}$ (d) ☑ $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4i}{25}$

8 Le module de $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ est

(a) ☐ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (b) ☐ $2\sqrt{2}$ (c) ☐ 2 (d) ☑ $\sqrt{2}$

9 Un argument de $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ est

(a) ☑ $\dfrac{7\pi}{12}$ (b) ☐ $\dfrac{5\pi}{12}$ (c) ☐ $\dfrac{\pi}{12}$ (d) ☐ $\dfrac{-5\pi}{6}$

10 L'inverse d'un nombre complexe non nul z est égale à son conjugué $\overline{z}$ si et seulement si

(a) ☐ $z = 1$ (b) ☑ $|z| = 1$ (c) ☐ $z \in \mathbb{R}$ (d) ☐ $z \in i\mathbb{R}$

11 Soit z un nombre complexe non nul tel que $z + \dfrac{1}{z}$ soit réel. Alors

(a) ☐ z est un réel
(b) ☑ z est un réel ou de module 1
(c) ☐ z est un réel ou imaginaire pur
(d) ☐ z est un réel ou égal à i ou $-i$

12 Soit $z \in \mathbb{C}$. Que dire de z si z^2 est réel ?

(a) ☐ z est forcément réel
(b) ☐ z est un réel ou de module 1
(c) ☑ z est un réel ou imaginaire pur
(d) ☐ z est un réel ou égal à i ou $-i$

13 Soit $(z, u) \in \mathbb{C}^2$ avec $u^2 = z$. Quand peut-on dire que $|u| < |z|$?

(a) ☐ c'est toujours le cas
(b) ☐ lorsque z n'est pas nul
(c) ☐ lorsque $0 < |z| < 1$
(d) ☑ lorsque $|z| > 1$

14 Que dire d'un nombre complexe z dont les deux racines carrées sont conjuguées ?

(a) ☐ c'est toujours le cas
(b) ☐ cela n'est pas possible
(c) ☐ z est un imaginaire pur
(d) ☑ z est un nombre réel négatif

15 Combien y a-t-il de nombres complexes z tels que $|z - i| \leqslant 1$ et $|z - 2| \leqslant 1$?

(a) ☑ aucun
(b) ☐ un seul
(c) ☐ deux complexes conjugués
(d) ☐ une infinité

16 Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Si $|z| = 1$ et $|z'| = 2$, alors $|z' - z|$ est

(a) ☐ égal à 1
(b) ☐ compris entre 1 et $\sqrt{5}$
(c) ☑ compris entre 1 et 3
(d) ☐ inférieur à -1

17 Laquelle des équations suivantes admet deux solutions complexes conjuguées ?

(a) ☐ $z^2 + 3iz + 4 = 0$
(b) ☐ $z^2 + 3iz - 4 = 0$
(c) ☑ $z^2 + 3z + 4 = 0$
(d) ☐ $z^2 + 3z - 4 = 0$

18 Soient a, b deux nombres complexes, et soit z_1 la racine de l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$ qui a le plus grand module. Alors

(a) ☐ $|z_1| \leqslant |a|$ (b) ☐ $|z_1| \leqslant |b|$ (c) ☑ $|z_1| \geqslant |a|$ (d) ☐ $|z_1| \geqslant |b|$

19 La formule de Moivre affirme que pour tout réel x :

(a) ☑ $(\cos x+i\sin x)^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$
(b) ☐ $(\cos x+\sin x)^n=\cos(nx)+\sin(nx)$
(c) ☐ $2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$
(d) ☐ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

20 Si x est un nombre réel, $(e^{ix}-e^{-ix})^6$ vaut

(a) ☑ $-64\sin^6 x$ (b) ☐ $64\sin^6 x$ (c) ☑ $64\cos^6 x$ (d) ☐ $64\sin(6x)$

21 Le cosinus de $\dfrac{5\pi}{6}$ vaut

(a) ☐ $-\dfrac{1}{2}$ (b) ☑ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (c) ☐ $-\dfrac{1}{3}$ (d) ☐ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

22 Le nombre complexe $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une racine sixième de

(a) ☐ 2 (b) ☐ 12 (c) ☑ 64 (d) ☐ $\dfrac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{18}}$

23 Si x est un réel non nul modulo π, le quotient $\dfrac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$ vaut

(a) ☐ $i\tan x$ (b) ☐ $\operatorname{cotan} x$ (c) ☐ $i\operatorname{cotan} x$ (d) ☑ $-i\operatorname{cotan} x$

24 Quelle est la valeur de $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$

(a) ☐ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ (b) ☑ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ (c) ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) ☐ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

25 Si $\sin x=\dfrac{1}{2}$ alors

(a) ☐ $x=\dfrac{\pi}{6}\quad[\pi]$
(b) ☐ $x=\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$ ou $x=-\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$
(c) ☐ $x=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}\quad[2\pi]$
(d) ☑ $x=\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}\quad[2\pi]$

26 Soit x un réel tel que $\tan\dfrac{x}{2}=\sqrt{2}$. Alors $\cos x$ vaut

(a) ☐ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
(b) ☑ $-\dfrac{1}{3}$
(c) ☐ $\dfrac{1}{3}$
(d) ☐ on ne peut pas savoir

27 Si x est un réel dans $]0,2\pi[$, le nombre complexe $\dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$ est égal à

(a) ☑ $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (b) ☐ $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ (c) ☐ $e^{i\frac{n+1}{2}x}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (d) ☐ $ie^{i\frac{nx}{2}}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

28 Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Le module de e^z est

a ☐ e^r b ☑ $e^{r\cos t}$ c ☐ $e^{r\sin t}$ d ☐ $re^{|t|}$

29 Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Un argument de e^z est

a ☐ $\sin t$ b ☑ $r\sin t$ c ☐ rt d ☐ $r\cos t$

30 Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, le réel $\cos\frac{\pi}{12}$ vaut

a ☐ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ b ☑ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ c ☐ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ d ☐ $\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$

31 La valeur de $\operatorname{cotan}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ est

a ☐ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ b ☐ -1 c ☐ $-\sqrt{3}$ d ☑ $\sqrt{3}$

32 La fonction $t \mapsto (e^{it})^2$ est périodique de période

a ☐ 1
b ☐ $\frac{\pi}{2}$
c ☑ π
d ☐ elle n'est pas périodique

33 Si a et b sont deux réels, on a $e^{ia} + e^{ib} = 0$ pour

a ☐ $a = -b \quad [2\pi]$
b ☐ $a = -b \quad [\pi]$
c ☑ $a = b + \pi \quad [2\pi]$
d ☐ aucune valeur de a et b

34 Si a, b sont deux réels, le module de $e^{ia} + e^{ib}$ est

a ☐ 2 b ☐ $2\left|\cos\frac{a+b}{2}\right|$ c ☑ $2\left|\cos\frac{a-b}{2}\right|$ d ☐ $e^{i\frac{a+b}{2}}$

35 Si a, b sont deux réels, un argument de $e^{ia}+e^{ib}$ (lorsque ce nombre est non nul) est égal à

a ☑ $\frac{a+b}{2} \quad [\pi]$ b ☐ $\frac{a+b}{2} \quad [2\pi]$ c ☐ $\pm\frac{a+b}{2} \quad [2\pi]$ d ☐ $a+b \quad [2\pi]$

36 Les solutions de l'équation $z^6 = \overline{z}^2$ sont

a ☐ les racines quatrièmes de l'unité
b ☐ les racines quatrièmes de l'unité et 0
c ☐ les racines huitièmes de l'unité
d ☑ les racines huitièmes de l'unité et 0