Polynômes

Exercice 1 :

1 (a) Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' + (2x-1)y = 0 \quad \text{(E)}.$$

(c) On note f la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$. Préciser l'expression de f.

(d) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2 (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, \mathrm{e}^{\arctan(x)}.$$

(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{P}_{n+1} = \big(1 - (2n+2)\mathrm{X}\big)\mathrm{P}_n + (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'.$$

3 (a) Expliciter les polynômes $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ et P_3.

(b) Prouver que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et son coefficient dominant est $\alpha_n = (-1)^n(n+1)!$.

4 En dérivant n fois par rapport à x l'égalité $(1+x^2)f'(x) = (1-2x)f(x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = a_n(x)\mathrm{P}_n(x) + b_n(x)\mathrm{P}_{n-1}(x),$$

où a_n et b_n sont des fonctions polynomiales simples que l'on déterminera.

5 Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{P}_n' = -n(n+1)\mathrm{P}_{n-1}.$$

6 (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine réelle commune.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, toute racine réelle de P_n est simple.

7 (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$: montrer que si r_1 et r_2 sont deux racines réelles de P_n (en supposant leur existence), avec $r_1 < r_2$, alors le polynôme P_{n-1} possède au moins une racine (réelle) dans l'intervalle $]r_1, r_2[$.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 2$: montrer que si P_n a toutes ses racines réelles, alors il en est de même pour P_{n-1}.

8 Montrer que P_3 possède trois racines réelles.

Aide: Commencer par étudier la fonction P_3.

9 Montrer, sans calculs, que P_5 possède soit une, soit trois, soit cinq racines réelles.

10 On suppose dans cette question que P_5 possède une et une seule racine réelle que l'on notera a.

Ainsi, $\mathrm{P}_5 = (\mathrm{X} - a)\mathrm{Q}$, où Q est un polynôme à coefficients réels.

(a) Justifier que le signe de $\mathrm{Q}(x)$ est constant pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\phi(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} (x-a) f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que la fonction ϕ est monotone sur $\mathbb{R}$.

Aide: On pourra commencer par étudier l'existence et la valeur de la dérivée de la fonction ϕ.

(c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'on a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \lim_{t\to-\infty} \phi(t) = 0$.

(d) Conclure à une absurdité.

11 On suppose dans cette question, que P_5 possède exactement trois racines réelles que l'on notera a, b et c.

Ainsi, $\mathrm{P}_5 = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)(\mathrm{X} - c)\mathrm{R}$, où R est un polynôme à coefficients réels.

(a) Justifier que le signe de $\mathrm{R}(x)$ est constant pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\psi(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} (x-a)(x-b)(x-c) f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que la fonction ψ est monotone sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer qu'on a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = 0$.

(d) Conclure à une absurdité.

12 Que peut-on en déduire concernant les racines de P_5 ? de P_4 ?