Polynômes

Exercice 1 :

1 (a) Comme $1+x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction continue $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{1+x^2}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\int \frac{2x-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \ln(1+x^2) - \arctan x + \mathrm{C} \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Commentaires:

— *À dire un truc, parlez de la continuité ou, au moins de la non nullité du dénominateur. Le correcteur comprendra !*

Mieux, au lieu de le dire sans que l'on sache qui c'est, écrivez simplement $1+x^2 \neq 0$. Ça suffit !

— *Si vous pouviez arrêter d'avoir la flemme de me mettre les $\mathrm{d}x$ ça me ferait plaisir. Avez-vous oublié à quel point c'est important dans les changements de variables ou en physique ?*

(b) Comme $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$, (E) est normalisable :

$$(\mathrm{E}) \iff y' + \frac{2x-1}{1+x^2}y = 0.$$

On a vu à la question précédente que $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{1+x^2}$ était une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On reconnaît alors une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\int \frac{2x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x} &= \lambda\, \mathrm{e}^{-\ln(1+x^2)+\arctan x} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}. \\ &= \lambda \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{e^{\ln(1+x^2)}} = \lambda \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto \lambda \dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Commentaires: *Même si moi, je ne l'ai pas écrit, dites brièvement que l'on reconnait une équation différentielle linéaire du premier ordre avant de planter la solution sous forme exponentielle.*

(c) Soit $f \in \mathcal{S}$.

$$f(0) = 1 \implies \lambda \frac{\mathrm{e}^{\arctan 0}}{1+0^2} = 1 \implies \lambda = 1.$$

D'où $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}$.

Commentaires: *Pour faire bien, placez que c'est un problème de Cauchy du premier ordre dont on sait qu'il existe une unique solution. Mais bon, on peut la trouver aussi.*

(d) Comme composée et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2 (a) — Pour $n=0$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} = \frac{\mathrm{P}_0(x)}{(1+x^2)^{0+1}}\,\mathrm{e}^{\arctan(x)},$$

en posant $\mathrm{P}_0 = 1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

— Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{e}^{\arctan(x)}.$$

Alors, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left[\frac{\mathrm{P}'_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} - \mathrm{P}_n(x)\frac{(n+1)(2x)}{(1+x^2)^{n+2}} + \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\right]\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} \\ &= \frac{(1+x^2)\mathrm{P}'_n(x) - (n+1)(2x)\mathrm{P}_n(x) + \mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} \end{aligned}$$

En posant $\mathrm{P}_{n+1} = (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}'_n + [1-(2n+2)\mathrm{X}]\,\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

$$= \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)}$$

La propriété est encore vraie au rang $n+1$.

La propriété étant vraie pour $n=0$ et héréditaire, on a donc montré que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)}.$$

b) Simple conséquence du raisonnement précédent en précisant que $\mathrm{P}_0 = 1$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}_{n+1} = [1-(2n+2)\mathrm{X}]\,\mathrm{P}_n + (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}'_n.$$

3 a) En utilisant ces données, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0 = 1 \\ \mathrm{P}_1 = 1-2\mathrm{X} \\ \mathrm{P}_2 = 6\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} - 1 \\ \mathrm{P}_3 = -24\mathrm{X}^3 + 36\mathrm{X}^2 + 12\mathrm{X} - 7 \end{cases}$$

b) Montrons par récurrence que le monôme dominant de P_n est $\alpha_n \mathrm{X}^n$ avec

$$\alpha_n = (-1)^n (n+1)!$$

— La formule est vérifiée pour $n=0$.
— Supposons que pour un entier n fixé ($n \in \mathbb{N}$) on ait $\mathrm{P}_n = \alpha_n \mathrm{X}^n + \cdots$ avec $\alpha_n = (-1)^n(n+1)!$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n+1} &= (1-(2n+2)\mathrm{X})\mathrm{P}_n + (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}'_n \\ &= (1-(2n+2)\mathrm{X})(\alpha_n\mathrm{X}^n + \cdots) + (1+\mathrm{X}^2)(n\alpha_n\mathrm{X}^{n-1} + \cdots) \\ &= -(2n+2)\alpha_n\mathrm{X}^{n+1} + \cdots + n\alpha_n\mathrm{X}^{n+1} + \cdots \\ &= -(n+2)\alpha_n\mathrm{X}^{n+1} + \cdots \end{aligned}$$

Comme $-(n+2)\alpha_n \neq 0$, le polynôme P_{n+1} est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est :

$-(n+2)\alpha_n = -(n+2)(-1)^n(n+1)! = (-1)^{n+1}(n+2)!$: la propriété est encore vérifiée au rang $n+1$.
— Héréditaire et initialisée pour $n=0$, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que f est solution de (E), donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) + (2x-1)f(x) = 0$.

On en déduit que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) = (1-2x)f(x)$.

— Les fonctions $x \longmapsto 1+x^2$ et f' étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, leur produit est dérivable au moins n fois et, d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1+x^2)f'(x)\right] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(1+x^2)\right] f'^{(n-k)}(x) \\
&= (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n(2x)f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}2f^{(n-1)}(x) \\
&= (1+x^2)\frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} + 2nx\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} \\
&\qquad + n(n-1)\frac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} \\
&= \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x) + 2nx\mathrm{P}_n(x) + n(n-1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)}
\end{aligned}$$

— Les fonctions $x \longmapsto 1-2x$ et f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, leur produit est dérivable n fois, et d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-2x)f(x)\right] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(1-2x)\right] f^{(n-k)}(x) \\
&= (1-2x)f^{(n)}(x) + n(-2)f^{(n-1)}(x) \\
&= (1-2x)\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} - 2n\frac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} \\
&= \frac{(1-2x)\mathrm{P}_n(x) - 2n(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)}
\end{aligned}$$

Les fonctions $x \longmapsto (1+x^2)f'(x)$ et $x \longmapsto (1-2x)f(x)$ étant égales, leurs dérivées n-ièmes sont égales.

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{P}_{n+1}(x) + 2nx\mathrm{P}_n(x) + n(n-1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)} = \frac{(1-2x)\mathrm{P}_n(x) - 2n(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)}.$$

On peut simplifier par $\dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\ \mathrm{e}^{\arctan(x)}$ qui n'est jamais nul :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{P}_{n+1}(x)+2nx\mathrm{P}_n(x)+n(n-1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x) = (1-2x)\mathrm{P}_n(x)-2n(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x).$$

Donc,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \left[1-(2n+2)x\right]\mathrm{P}_n(x) - n(n+1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x).$$

Commentaires: *Il est important de préciser que l'égalité va perdurer en dérivant. Ce ne serait, par exemple, pas le cas si on intégrait ou si on faisait un DL n'importe comment. Par exemple !*

5 Comme les fonctions polynomiales coïncident pour une infinité de valeurs, les polynômes sont égaux :

$$\mathrm{P}_{n+1} = \left[1-(2n+2)\mathrm{X}\right]\mathrm{P}_n - n(n+1)(1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_{n-1}.$$

Or, on a vu en 2.b que $\mathrm{P}_{n+1} = \left[1-(2n+2)\mathrm{X}\right]\mathrm{P}_n + (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'$.

En soustrayant les deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n' + n(n+1)(1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_{n-1} &= 0 \\
(1+\mathrm{X}^2)\left[\mathrm{P}_n' + n(n+1)\mathrm{P}_{n-1}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}[X]$ étant intègre, on en déduit finalement que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathrm{P}'_n + n(n+1)\mathrm{P}_{n-1} = 0.$$

Commentaires: *Peu de correcteurs le sanctionneront vraiment mais notez bien que l'on passe d'une égalité entre fonction polynomiales à une égalité entre polynômes. Ce n'est pas si évident que ça ! Si vous le précisez, même vite fait, le correcteur appréciera et vous le rendra surement. Je dis ça, je dis rien.*

6 a Soit $n \geqslant 1$. Supposons que P_n et P_{n+1} aient une racine réelle commune α.

Comme $\mathrm{P}_{n+1} = [1-(2n+2)\mathrm{X}]\,\mathrm{P}_n - n(n+1)(1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_{n-1}$, en évaluant cette expression en α, on obtient :

$$0 = 0 - n(n+1)(1+\alpha^2)\mathrm{P}_{n-1}(\alpha).$$

Or, $n \geqslant 1$ donc $-n(n+1)(1+\alpha^2) \neq 0$ et par conséquent, $\mathrm{P}_{n-1}(\alpha) = 0$. α est encore une racine de P_{n-1}.

En réitérant le raisonnement, α est également racine de $\mathrm{P}_{n-2}, \cdots, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1$ et enfin de P_0.

C'est absurde car $\mathrm{P}_0 = 1$ n'a pas de racine !

On en déduit que P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine réelle commune.

b Soit $n \geqslant 1$ et supposons que P_n admette une racine réelle multiple α.

On a alors $\mathrm{P}_n(\alpha) = \mathrm{P}'_n(\alpha) = 0$.

Or, $\mathrm{P}'_n = -n(n+1)\mathrm{P}_{n-1}$

En évaluant cette expression en α, on obtient

$$0 = -n(n+1)\mathrm{P}_{n-1}(\alpha).$$

Puisque $-n(n+1) \neq 0$, α est racine de P_{n-1}. C'est absurde car on a prouvé que c'était impossible à la question précédente.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, les racines réelles de P_n sont donc simples.

7 a Soit $n \geqslant 2$. Supposons qu'on ait deux racines réelles r_1 et r_2 de P_n. On suppose $r_1 < r_2$.

Comme :

- P_n est continue sur $[r_1, r_2]$,
- P_n est dérivable sur $]r_1, r_2[$,
- $\mathrm{P}_n(r_1) = \mathrm{P}_n(r_2)$,

d'après le théorème de Rolle, P'_n possède au moins une racine c dans $]r_1, r_2[$.

En tenant compte de $\mathrm{P}'_n = -n(n+1)\mathrm{P}_{n-1}$, c est encore racine de P_{n-1} (puisque $-n(n+1) \neq 0$).

Donc, P_{n-1} possède au moins une racine (réelle) dans l'intervalle $]r_1, r_2[$.

b Soit $n \geqslant 2$. Supposons que P_n a toutes ses racines réelles.

D'après la question 6.a, on sait que ces racines sont simples.

D'après la question 3.b $\deg(\mathrm{P}_n) = n$ donc P_n admet n racines distinctes : $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$.

On a vu en 7.a. que P_{n-1} possédait au moins une racine réelle c_i sur chaque $]r_i, r_{i+1}[$.

On obtient donc $n-1$ racines réelles distinctes pour P_{n-1} qui est de degré $n-1$ et qui ne peut donc en compter davantage.

On peut alors conclure que :

Si P_n a toutes ses racines réelles, alors il en est de même pour P_{n-1}.

8 Montrons que $P_3 = -24X^3 + 36X^2 + 12X - 7$ possède trois racines réelles.

Étudions la fonction polynomiale $P_3 : x \longmapsto -24x^3 + 36x^2 + 12x - 7$.

P_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad P_3'(x) = -24 \times 3x^2 + 36 \times 2x + 12 = 12(-6x^2 + 6x + 1)$.

Commentaires: *On vérifie au passage la formule :* $P_n' = -n(n+1)P_{n-1}$.

Les racines de la dérivée sont $\dfrac{3-\sqrt{15}}{6}$ et $\dfrac{3+\sqrt{15}}{6}$, et cette dérivée est négative à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$\dfrac{3-\sqrt{15}}{6}$		$\dfrac{3+\sqrt{15}}{6}$		$+\infty$
$P_3'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P_3	$+\infty$	$\searrow$	$P_3\left(\dfrac{3-\sqrt{15}}{6}\right)$	$\nearrow$	$P_3\left(\dfrac{3+\sqrt{15}}{6}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Mais le calcul de $P_3\left(\dfrac{3-\sqrt{15}}{6}\right)$ et $P_3\left(\dfrac{3+\sqrt{15}}{6}\right)$ n'est pas très engageant.

On peut plutôt remarquer que :

- $P_3(0) = -7 < 0$, donc, sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} P_3(x) = +\infty$ et que P_3 est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P_3 s'annule sur $]-\infty, 0[$.
- De même, $P_3(0) = -7 < 0$ et $P_3(1) = 17 > 0$, donc P_3 s'annule sur $]0, 1[$.
- Enfin $P_3(1) = 17 > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_3(x) = -\infty$, donc P_3 s'annule sur $]1, +\infty[$.

Le polynôme P_3 admet donc trois racines réelles distinctes.

Commentaires: *Comme il est de degré 3, il ne peut donc en compter davantage. On a donc toutes les racines de* P_3 *qui sont réelles.*

9 Montrons que P_5 possède soit une, soit trois, soit cinq racines réelles.

- Supposons que P_5 possède exactement 4 racines réelles distinctes : r_1, r_2, r_3 et r_4.

  On peut alors écrire $P_5 = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)(X - r_4)Q$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

  Et comme $\deg P_5 = 5$, on en déduit que $\deg Q = 1$. En tant que polynôme réel de degré 1, Q admet une racine réelle. Comme P_5 ne possède que quatre racines réelles la racine de Q est à choisir parmi les r_i, et donc cette racine sera double. C'est absurde car on a prouvé en **6** (b) que toutes les racines sont simples.
- Supposons que P_5 possède exactement 2 racines réelles distinctes : r_1 et r_2.

  On peut alors écrire $P_5 = (X - r_1)(X - r_2)Q$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

  On a cette fois $\deg Q = 3$. En tant que polynôme réel de degré 3, Q admet au moins une racine réelle. On le démontre soit en considérant le théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, ou bien en appliquant le TVI à la fonction polynomiale Q dont les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont opposées. À nouveau, comme P_5 ne possède que deux racines réelles la racine de Q est soit r_1, soit r_2. Encore une fois, on obtient une racine double, ce qui est absurde.

— P_5 est un polynôme réel de degré impair. Il a nécessairement au moins une racine réelle (toujours par le TVI par exemple).

Au final, on a éliminé les cas où P_5 aurait exactement 4, 2 ou 0 racine(s) réelle(s).

Comme $\deg P_5 = 5$ il ne reste que les possibilités : une, trois ou cinq racines réelles pour P_5.

10 a) Supposons que Q change de signe. Comme la fonction polynomiale Q est continue sur $\mathbb{R}$, elle doit alors s'annuler (d'après le TVI) sur $\mathbb{R}$, disons en b. Or b ne peut ni être égal à a (qui serait alors une racine double de P_5 : absurde), ni être différent de a (car P_5 aurait alors plus d'une racine réelle : absurde).

Donc, $Q(x)$ garde un signe constant pour $x \in \mathbb{R}$.

b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\phi(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} (x-a) f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $g : t \longmapsto (t-a)f^{(5)}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $G : t \longmapsto \displaystyle\int_0^t (x-a)f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x$ est la primitive de g qui s'annule en 0. On a donc $\forall\, t \in \mathbb{R}, G'(t) = g(t)$.

Or, d'après la relation de Chasles, $t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = G(t) - G(-t)$.

Donc ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \phi'(t) &= G'(t) + G'(-t) \\
&= (t-a)f^{(5)}(t) + (-t-a)f^{(5)}(-t) \\
&= (t-a)\frac{P_5(t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(t)} - (t+a)\frac{P_5(-t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(-t)} \\
&= (t-a)\frac{(t-a)Q(t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(t)} - (t+a)\frac{(-t-a)Q(-t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(-t)} \\
&= \frac{(t-a)^2 Q(t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(t)} + \frac{(t+a)^2 Q(-t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(-t)}
\end{aligned}$$

Si la fonction Q est positive, on a $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \phi'(t) \geqslant 0$ comme somme de termes positifs, et donc ϕ est croissante sur l'*intervalle* $\mathbb{R}$.

De même si q est négative, ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, ϕ est monotone sur $\mathbb{R}$.

c) Comme $t \longmapsto x-a$ et $t \longmapsto f^{(4)}(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) &= \int_{-t}^{t} \underset{\downarrow}{(x-a)} \overset{\uparrow}{f^{(5)}(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[(x-a)f^{(4)}(x)\Big]_{-t}^{t} - \int_{-t}^{t} f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (t-a)f^{(4)}(t) - (-t-a)f^{(4)}(-t) - \Big[f^{(3)}(x)\Big]_{-t}^{t} \\
&= (t-a)f^{(4)}(t) - (-t-a)f^{(4)}(-t) - f^{(3)}(t) + f^{(3)}(-t) \\
&= (t-a)\frac{P_4(t)}{(1+t^2)^5}e^{\arctan(t)} + (t+a)\frac{P_4(-t)}{(1+t^2)^5}e^{\arctan(-t)} \\
&\qquad - \frac{P_3(-t)}{(1+t^2)^4}e^{\arctan(t)} + \frac{P_3(t)}{(1+t^2)^4}e^{\arctan(-t)}.
\end{aligned}$$

Or $(t-a)\dfrac{\mathrm{P}_4(t)}{(1+t^2)^5}e^{\arctan(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} t\dfrac{\alpha_4 t^4}{t^{10}}e^{\frac{\pi}{2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_4 e^{\frac{\pi}{2}}}{t^5}$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}(t-a)\dfrac{\mathrm{P}_4(t)}{(1+t^2)^5}e^{\arctan(t)} = 0$.

Et de la même manière, les autres termes tendent également vers 0 en $+\infty$.

Finalement, $\lim\limits_{t\to+\infty}\phi(t) = 0$ et, mutatis mutandis, $\lim\limits_{t\to-\infty}\phi(t) = 0$.

(d) Compte tenu de ces deux limites et de la monotonie de ϕ, on peut en conclure que $\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \phi(t) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Or, } \forall\, t\in\mathbb{R}, \phi(t) &= \int_{-t}^{t}(x-a)f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-t}^{t}(x-a)\frac{\mathrm{P}_5(x)}{(1+x^2)^6}e^{\arctan(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-t}^{t}\frac{(x-a)^2\mathrm{Q}(x)}{(1+x^2)^6}e^{\arctan(x)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La fonction sous le signe somme étant continue, et de signe constant, puisque son intégrale est nulle sur $[-1,1]$ (par exemple), on en déduit que cette fonction est elle-même nulle sur $[-1,1]$.

Comme l'exponentielle est non nulle, le polynôme $(\mathrm{X}-a)^2\mathrm{Q}$ doit s'annuler pour une infinité de valeurs. Il est donc nul. Par suite, $\mathrm{Q}=0$, et donc $\mathrm{P}_5 = 0$. C'est absurde, puisqu'on sait que $\deg \mathrm{P}_5 = 5$.

Par conséquent, P_5 ne peut avoir une seule racine réelle.

11 (a) A nouveau, si $\mathrm{R}(x)$ changeait de signe, étant continue, elle s'annulerait. P_5 aurait alors soit une racine réelle double, soit quatre racines réelles.

Dans les deux cas, on conclut à une absurdité, donc le signe de $\mathrm{R}(x)$ est constant pour $x\in\mathbb{R}$.

(b) On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}$: $\psi(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t}(x-a)(x-b)(x-c)f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit $h : t \longmapsto (t-a)(t-b)(t-c)f^{(5)}(t)$ et $\mathrm{H} : t\longmapsto \displaystyle\int_0^t h(x)\,\mathrm{d}x$ (H est une primitive de h).

Comme $\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \psi(t) = \mathrm{H}(t)-\mathrm{H}(-t)$, on en conclut que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\begin{aligned}\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \psi'(t) &= h(t)+h(-t)\\ &= (t-a)(t-b)(t-c)f^{(5)}(t) + (-t-a)(-t-b)(-t-c)f^{(5)}(-t)\\ &= (t-a)(t-b)(t-c)\frac{\mathrm{P}_5(t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(t)}\\ &\qquad + (-t-a)(-t-b)(-t-c)\frac{\mathrm{P}_5(-t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(-t)}\\ &= \frac{(t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2\mathrm{R}(t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(t)}\\ &\qquad + \frac{(t+a)^2(t+b)^2(t+c)^2\mathrm{R}(-t)}{(1+t^2)^6}e^{\arctan(-t)}\end{aligned}$$

Comme R est de signe constant, on a une somme de termes de même signe. Donc ψ' est de signe constant sur l'*intervalle* $\mathbb{R}$.

En conclusion, ψ est monotone sur $\mathbb{R}$.

(c) On fait trois intégrations par parties successives pour faire disparaître le polynôme de degré 3 $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3-\sigma_1x^2+\sigma_2x-\sigma_3$, où

$$\sigma_1 = a+b=c,\qquad \sigma_2 = ab+bc+ca\qquad \text{et}\qquad \sigma_3 = abc.$$

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) &= \int_{-t}^{t} (x-a)(x-b)(x-c) f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-t}^{t} (x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3) \overset{\uparrow}{f^{(5)}}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[(x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3) f^{(4)}(x)\Big]_{-t}^{t} - \int_{-t}^{t} (3x^2 - 2\sigma_1 x + \sigma_2) f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[(x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3) f^{(4)}(x)\Big]_{-t}^{t} - \Big[(3x^2 - 2\sigma_1 x + \sigma_2) f^{(3)}(x)\Big]_{-t}^{t} \\
&\qquad + \int_{-t}^{t} (6x - 2\sigma_1) f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[(x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3) f^{(4)}(x)\Big]_{-t}^{t} - \Big[(3x^2 - 2\sigma_1 x + \sigma_2) f^{(3)}(x)\Big]_{-t}^{t} \\
&\qquad + \Big[(6x - 2\sigma_1) f^{(2)}(x)\Big]_{-t}^{t} - \int_{-t}^{t} 6 f^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[(x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3) f^{(4)}(x)\Big]_{-t}^{t} - \Big[(3x^2 - 2\sigma_1 x + \sigma_2) f^{(3)}(x)\Big]_{-t}^{t} \\
&\qquad + \Big[(6x - 2\sigma_1) f^{(2)}(x)\Big]_{-t}^{t} - \big[6 f'(x)\big]_{-t}^{t}.
\end{aligned}$$

Mais,

- $(t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3) f^{(4)}(t) = (t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3) \dfrac{\mathrm{P}_4(t)}{(1+t^2)^5} e^{\arctan(t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_4 e^{\frac{\pi}{2}}}{t^3}$.
- $(3t^2 - 2\sigma_1 t + \sigma_2) f^{(3)}(t) = (3t^2 - 2\sigma_1 t + \sigma_2) \dfrac{\mathrm{P}_3(t)}{(1+t^2)^4} e^{\arctan(t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{3\alpha_3 e^{\frac{\pi}{2}}}{t^3}$.
- $(6t - 2\sigma_1) f^{(2)}(t) = (6t - 2\sigma_1) \dfrac{\mathrm{P}_2(t)}{(1+t^2)^3} e^{\arctan(t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{6\alpha_2 e^{\frac{\pi}{2}}}{t^3}$.
- $6 f'(t) = 6 \dfrac{\mathrm{P}_1(t)}{(1+t^2)^2} e^{\arctan(t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{6\alpha_1 e^{\frac{\pi}{2}}}{t^3}$.

Même raisonnement pour les termes en $-t$.

Finalement, $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = 0$ et, par le même raisonnement, $\lim\limits_{t \to -\infty} \psi(t) = 0$.

d) On a à nouveau une fonction monotone de limites nulles. Elle est donc nulle.

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \int_{-t}^{t} (x-a)(x-b)(x-c) f^{(5)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-t}^{t} \frac{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2 \mathrm{R}(x)}{(1+x^2)^6} e^{\arctan(x)}\,\mathrm{d}x.$$

La fonction sous le signe somme étant continue de signe constant, elle est donc nulle, ce qui implique $\mathrm{R} = 0$, puis $\mathrm{P}_5 = 0$: absurde !

En conclusion, P_5 ne peut avoir exactement trois racines réelles.

12 On peut donc conclure que P_5 admet cinq racines réelles, et d'après 7 b), que P_4 admet quatre racines réelles.

Commentaires: *Le raisonnement peut-être réitéré pour tous les polynômes P_n, et on prouve ainsi qu'ils sont tous scindés simples, c'est-à-dire n'admettant que des racines réelles simples.*