Géométrie - DL - Polynômes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Il est demandé d'encadrer les résultats des calculs et de numéroter les copies. ***Une attention toute particulière devra être portée sur l'énoncé et le nom des théorèmes utilisés. Toute affirmation, même correcte, sans justification sera survolée de la même manière et oubliée.***

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation des calculatrices et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur la copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre

Exercice 1 : On munit le plan d'un repère orthonormé et on notera $\cdot$ le produit scalaire de deux vecteurs.

1. Puissance d'un point par rapport à un cercle

Durant tout cet exercice, il est vivement conseillé de faire une figure au brouillon.

1. Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R strictement positif et I un point du plan.
   Une droite $\mathcal{D}$ passant par I et sécante à $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}$ en A et en B.
   On note A′ le symétrique de A par rapport à O.
   a) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA'}}=\mathrm{IO}^2-\mathrm{R}^2$.

   La valeur $\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ est donc indépendante de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ choisie. On note dorénavant $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I})$ ce nombre.

   b) Quelle information le signe de $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I})$ donne-t-il sur la position du point I ?

2. Soit I un point du plan tel que $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I})\geqslant 0$, Λ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{IM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$ et T un point de $\Lambda\cap\mathcal{C}$.
   a) Quelle est la nature de Λ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Démontrer que $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I})=\mathrm{IT}^2$.

2. Axe radical de deux cercles.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O′, distincts, de rayons respectifs R et R′ strictement positifs.

On désigne par Ω le milieu du segment [OO′] et par Δ l'ensemble des points I du plan vérifiant $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}) = \sigma_{\mathcal{C}'}(\mathrm{I})$.

3. Démontrer que $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}) = \sigma_{\mathcal{C}'}(\mathrm{I}) \iff 2\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega \mathrm{I}} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2$.

4. (a) Soient I_1 et I_2 deux points distincts de Δ. Démontrer que les droites $(\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2)$ et (OO′) sont orthogonales.
   (b) Déterminer un point I_0 appartenant à Δ et (OO′). *On pourra remarquer que cela se traduit par $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ et $\overrightarrow{\Omega \mathrm{I}_0}$ colinéaires donc qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\Omega \mathrm{I}_0} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{OO}'}$.*
   (c) En déduire la nature de Δ que l'on appelle axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 2 :

1. **Résultat préliminaire :** Soit (x_n) et (y_n) deux suites de réels strictement positifs.

   Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \left(\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}\right) \cup \{+\infty\}$ alors :

$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(y_n).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation :

$$x + e^x = n \qquad (\mathrm{E}_n)$$

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{x_n}\right)$.
   (d) Justifier que $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et en déduire un équivalent de x_n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - \ln(n)$.

   (a) En utilisant (E_n), Montrer que $e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.
   (b) Déterminer la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de $e^{y_n} - 1$.

4. À l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Problème 3 : *Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.*
Pour une fonction continue $f : [-1\,;1] \longmapsto \mathbb{R}$, on notera $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[-1;1]} |f(t)|$ (dont l'existence est assurée par le préliminaire).

0. Résultats préliminaires :

Dans cette partie, pour $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on note $\widetilde{\mathrm{P}} : \begin{array}{rcl} [-1\,;1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & & \widetilde{\mathrm{P}}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k \end{array}$

la fonction polynomiale associée sur $[-1\,;1]$.

1. Si $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ sont tels que $\forall t \in [-1\,;1]\,, \widetilde{\mathrm{P}}(t) = \widetilde{\mathrm{Q}}(t)$ montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

Dans tout le problème on confondra donc polynôme et fonction polynomiale associée sur $[-1\,;1]$.

2. Si f est une fonction continue de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\max\limits_{t\in[-1;1]} |f(t)|$.

I. Polynômes de Tchebychev :

Pour tout entier naturel n, on définit sur $[-1\,;1]$ la fonction T_n par :

$$\forall x \in [-1\,;1]\,, \quad \mathrm{T}_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, T_n est correctement définie sur $[-1\,;1]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer $\mathrm{T}_n(1)$ et $\mathrm{T}_n(-1)$.
   b. Montrer que $\mathrm{T}_n(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5. Montrer que $\|\mathrm{T}_n\|_\infty = 1$.

6. Calculer T_0 et T_1

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in [-1\,;1]\,,\ \mathrm{T}_{n+2}(x) = 2x\mathrm{T}_{n+1}(x) - \mathrm{T}_n(x).$$

   On pourra calculer $\mathrm{T}_{n+2}(x) + \mathrm{T}_n(x)$.

8. Calculer T_2 et T_3.

9. Montrer, par récurrence double, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale.

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.

11 Justifier que :

$$\forall \theta \in [0\,;\pi]\,, \quad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

12 (a) Montrer que : $\forall \theta \in]0\,;\pi[, \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_n'(\cos(\theta)) = n\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

(b) En déduire les extrémums de T_n (avec $n \geqslant 2$) et en quels points ils sont atteints.

(c) À l'aide d'un développement limité, déterminer $\mathrm{T}_n'(1)$.

13 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in [-1\,;1]\,,\ (1-x^2)\mathrm{T}_n''(x) - x\mathrm{T}_n' + n^2\mathrm{T}_n(x) = 0.$$

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Résoudre sur $[0\,;\pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

(b) En déduire que T_n est scindé dans $\mathbb{R}$ et donner ses racines.

(c) Donner la factorisation de T_n en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

(d) En utilisant les relations coefficients-racines d'un polynôme, montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$