Géométrie - DL - Polynômes

Commentaires: *Comme disait Euclide en son temps :*

Toute affirmation sans preuve pourra être niée sans preuve !

- *Cessez de confondre $\iff$ avec = !*
- *Ce serait bien que vous appreniez une bonne fois pour toute à conjuguer les verbes du deuxième groupe et à accorder leur participe présent. Ça fait pitié en CPGE. Promis ! On ne peut espérer faire des maths à bac +1 si on ne sait pas faire du français à CP+1 !*

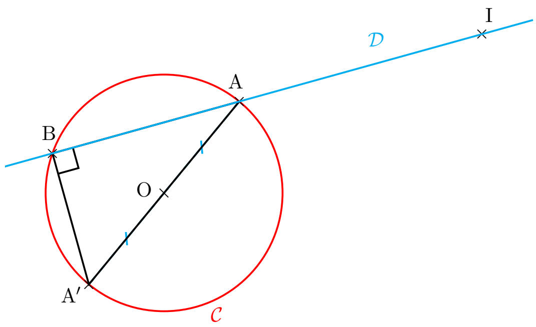
  On dit :

  « Une fonction est définie », « un polynôme est défini » et « On définit ».
- *En fait, même remarque pour les participe passé du premier groupe.*
- *Même chose pour le féminin des adjectifs et attributs comme « vrai » ou « vérifié » qui s'accordent avec UNE proposition.*
- *J'ai quand même vu des efforts de justification. Ça commence à venir. C'est bien. At last !*

Exercice 1 :

Partie 1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

1. On trace la figure ci-après pour illustrer la situation :



(a) Par construction, le point O est le milieu de $[AA']$ donc $[AA']$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. De plus, on a également B qui appartient à $\mathcal{C}$ donc le triangle ABA' est rectangle en B. Il s'ensuit que $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Par ailleurs, les points I, A et B sont tous sur $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On en déduit que $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{A'B}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{A'B}=0$.

Dès lors, grâce à la relation de Chasles, on écrit

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}\cdot(\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{A'B})=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}+\underbrace{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{A'B}}_{=0}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}.$$

À nouveau, en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}&=(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA'})=(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{IO}-\overrightarrow{OA})\quad\text{car } \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA'},\\&=IO^2-OA^2=IO^2-R^2.\end{aligned}$$

La valeur $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=IO^2-R^2$ ne dépend que de I, O et R donc est indépendante de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ choisie.

(b) On a $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}) = \mathrm{IO}^2 - \mathrm{R}^2$ donc

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}) > 0 &\iff \mathrm{IO}^2 > \mathrm{R}^2 \iff \mathrm{OI} > \mathrm{R} \iff \text{I est en dehors de } \mathcal{C},\\
\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}) = 0 &\iff \mathrm{IO}^2 = \mathrm{R}^2 \iff \mathrm{OI} = \mathrm{R} \iff \text{I est sur le cercle } \mathcal{C},\\
\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}) < 0 &\iff \mathrm{IO}^2 < \mathrm{R}^2 \iff \mathrm{OI} < \mathrm{R} \iff \text{I est à l'intérieur de } \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Le signe de $\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I})$ permet de savoir si I est à l'intérieur, sur ou en dehors du cercle $\mathcal{C}$.

2 (a) En supposant que M soit distinct de I et O, si M vérifie $\overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ alors le triangle IOM est rectangle en M. Il est donc inscrit dans le cercle de diamètre [IO]. Ceci est également le cas si M coïncide avec I ou O.

Réciproquement, posons Ω le milieu de [OI]. Si M appartient au cercle de diamètre [OI] et distinct de O et de I alors l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)$ qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OI}}$ a pour angle au centre $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}\,;\overrightarrow{\Omega\mathrm{O}}\right) = \pi$.

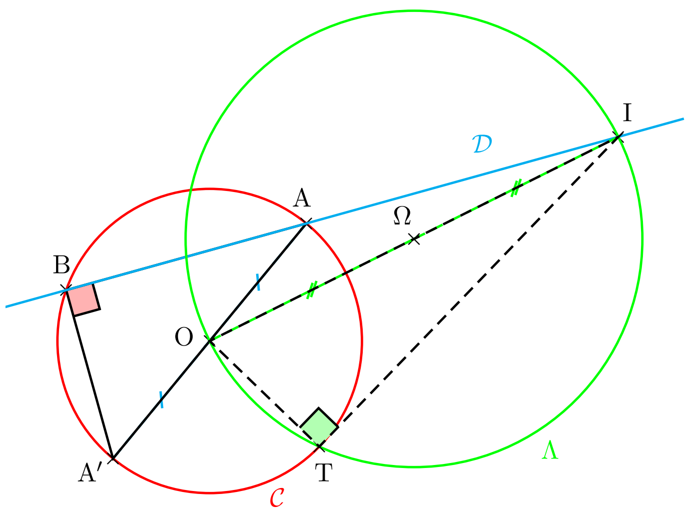
Finalement, $\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}\,;\overrightarrow{\Omega\mathrm{O}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$. Une nouvelle fois, $\mathrm{M} = \mathrm{I}$ ou $\mathrm{M} = \mathrm{O}$ conviennent aussi.

En conclusion, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ est le cercle de diamètre [OI].

Commentaires:

- *On pouvait aussi utiliser la caractérisation du cours ou refaire les calculs mais c'est moins joli.*
- *Et pour tous ceux qui m'ont démontré cela en utilisant des coordonnées, où est votre repère qui vous permettait de faire cela ?*
- *En appelant $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre [OI], Λ est aussi l'ensemble des points M du plan tels que $\sigma_{\mathcal{C}'}(\mathrm{M}) = 0$. En soi, cette question pouvait donc être vue comme une réciproque à la question 1 (b).*

(b) On trace la figure ci-après pour illustrer la situation.



Le point T appartient au cercle Λ dont un diamètre est [OI] donc le triangle OIT est rectangle en T.

D'après le théorème de Pythagore, on a $\mathrm{OI}^2 = \mathrm{OT}^2 + \mathrm{IT}^2 \iff \mathrm{IT}^2 = \mathrm{OI}^2 - \mathrm{OT}^2$.

Comme T qui appartient également à $\mathcal{C}$ alors $\mathrm{OT} = \mathrm{R}$.

Finalement, $\mathrm{IT}^2 = \mathrm{OI}^2 - \mathrm{R}^2 = \sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I})$.

Partie 2 Axe radical de deux cercles.

3 On utilise la condition sur les points I et la sempiternelle relation de Chasles alliées à la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}) = \sigma_{\mathcal{C}'}(\mathrm{I}) &\iff \mathrm{IO}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{IO}'^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{IO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IO}} - \overrightarrow{\mathrm{IO}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IO}'} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{IO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IO}} - (\overrightarrow{\mathrm{IO}} + \overrightarrow{\mathrm{OO}'}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{IO}} + \overrightarrow{\mathrm{OO}'}) = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff -2\overrightarrow{\mathrm{IO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} - \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff -2(\overrightarrow{\mathrm{I}\Omega} + \overrightarrow{\Omega\mathrm{O}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} - \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff (2\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}} + \underbrace{2\overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} - \overrightarrow{\mathrm{OO}'}}_{=\vec{0}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2, \quad \text{(linéarité à droite de $\cdot$)} \\
&\iff 2\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \quad \text{car Ω est le milieu de $[\mathrm{OO}']$,} \\
&\iff 2\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \quad \text{par symétrie du produit scalaire.}
\end{aligned}$$

4 (a) Grâce à la question précédente, on a $2\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_1} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2$ et $2\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_2} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2$ donc

$$\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_2}.$$

Ce qui se réécrit

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_2} = 0 &\iff \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot (\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_1} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_2}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot (\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_1} + \overrightarrow{\mathrm{I}_2\Omega}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{I}_2\mathrm{I}_1} = 0 \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{I}_2\mathrm{I}_1} \text{ sont orthogonaux} \\
&\iff (\mathrm{OO}') \text{ et } (\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2) \text{ sont orthogonales.}
\end{aligned}$$

(b) Soit I_0 un point de (OO'). Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ et $\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_0}$ sont alors colinéaires *i.e.* il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_0} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$.

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_0 \in \Delta &\iff 2\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_0} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff 2\lambda\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff 2\lambda\|\overrightarrow{\mathrm{OO}'}\|^2 = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 \\
&\iff \lambda = \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2}{2\|\overrightarrow{\mathrm{OO}'}\|^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le scalaire λ est bien défini et, pour cette valeur, le point I_0 défini par $\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}_0} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ appartient à Δ.

On a bien trouvé un point de $\Delta \cap (\mathrm{OO}')$ qui est donc non vide.

(c) D'après les équivalences des questions précédentes, Δ est la droite orthogonale à (OO') passant par I_0.

Exercice 2 :

1 Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \left(\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}\right) \cup \{+\infty\}$, on en déduit déjà qu'il existe un rang $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > 0$, $y_n > 0$ et $y_n \neq 1$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$.

De plus, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $\ln(y_n) \neq 0$ et

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = \frac{\ln(y_n) + \ln\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)}{\ln(y_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)}{\ln(y_n)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)}{\ln(y_n)} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = 1$ et $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(y_n)$.

Commentaires:

— *Apparemment, il est important de rappeler que les équivalents comme les o () ou les O () ne sont pas compatibles avec la composition à gauche mais seulement à droite... d'où l'intérêt de la question.*

Je crois que tous ceux qui ont affirmé haut et fort que : « $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ alors en composant par ln on a ... » n'ont pas vu la subtilité. Presque tous en fait ! sic !

Votre main gauche n'est pas votre main droite. C'est pareil pour la composition !

— *Il ne suffisait pas de dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeaient vers une même limite strictement positive et différente de 1 pour pouvoir conclure qu'on pouvait composer par ln. La question était justement de prouver qu'on pouvait le faire dans ce cas.*

— *Dans la même idée, ce n'est pas parce que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ que l'on peut en déduire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*

Pour être plus précis, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et pourtant $\dfrac{1}{n} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} \dfrac{1}{n^2}$.

2 (a) Posons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^x$.

La fonction g est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + e^x > 0$. Donc g est strictement croissante.

La fonction g est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, n a donc un unique antécédent x_n par g.

En d'autres termes, l'équation (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = n < n + 1 = g(x_{n+1})$.

Comme Puisque g est strictement croissante, on en déduit $x_n < x_{n+1}$ et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors soit elle est majorée et elle converge vers une limite finie, soit elle n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$.

Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ. Alors en passant à la limite dans $g(x_n) = n$, on obtient que $\lim g(x_n) = +\infty$.

Or, g est continue et $\lim g(x_n) = g(\ell)$ qui est finie, d'où une contradiction.

Ainsi on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Enfin, $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$ entraîne $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{x_n})$.

(d) Comme $x_n + \mathrm{e}^{x_n} = n \iff \mathrm{e}^{x_n} - n = -x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{x_n})$ alors $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

En utilisant la question préliminaire, on peut prendre le logarithme dans ces équivalents :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

3 (a) Tout d'abord puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, on a $y_n \underset{n\to+\infty}{=} x_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\ln(n))$.

On remplace dans (E_n) :

$$e^{y_n} = e^{x_n - \ln(n)} = \frac{e^{x_n}}{n} = \frac{n - x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n - \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

(b) Par les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.

Ainsi, on obtient avec la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{y_n} = 1$, soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$.

Comme enfin $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$, on en déduit que $e^{y_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$.

4 D'après les questions précédentes, on a :

$$\mathrm{e}^{y_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{y_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}.$$

Par transitivité de l'équivalence, on en déduit donc que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n}$ c'est à dire

$$y_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Finalement, on obtient :

$$x_n = \ln(n) + y_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Problème 3 : 0. Résultats préliminaires :

1 Posons $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q}$. Pour $t \in [-1\,;1]$, $\widetilde{\mathrm{R}}(t) = \widetilde{\mathrm{P}}(t) - \widetilde{\mathrm{Q}}(t) = 0$, donc R admet une infinité de racines (tout élément de $[-1\,;1]$).

On a donc $\mathrm{R} = 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

Commentaires: *$\widetilde{\mathrm{P}}$ et $\widetilde{\mathrm{Q}}$ ne sont pas des polynômes mais des fonctions polynomiales donc on ne peut se servir de l'équivalence « Polynômes égaux $\iff$ Coefficients égaux » par contre ce sont elles qui donnent les racines de $\widetilde{\mathrm{P} - \mathrm{Q}}$ en nombre infini.*

2 La fonction $g = |f|$ est continue sur le segment $[-1\,;1]$ comme composée de fonctions qui le sont. Elle est donc bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum.

Ceci justifie l'existence de $\max\limits_{t\in[-1;1]} |f(t)|$.

I. Polynômes de Tchebychev :

3 La fonction arccos étant définie sur $[-1\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et cos sur $\mathbb{R}$, par composition T_n est défini sur $[-1\,;1]$.

Commentaires: *Remarquez que la seule restriction du domaine de définition arrive de* arccos. *Il eût été autrement plus difficile de justifier que* $\arccos\left(n\cos(x)\right)$ *était définie sur* $\mathbb{R}$ *puisqu'il aurait fallu justifier que* $n\cos$ *était à valeurs dans* $[-1\,;1]$. *Le domaine de définition aurait alors été dépendant de* $n \in \mathbb{N}$.

4 (a) Comme $\arccos(1) = 0$ et $\arccos(-1) = \pi$, on a :

$$\mathrm{T}_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

(b) Comme $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\mathrm{T}_n(0) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5 Soit $n \in \mathbb{N}$.

— On sait que pour tout $x \in [-1\,;1]\,, |\mathrm{T}_n(x)| = |\cos(n\arccos(x))| \leqslant 1$ donc $\|\mathrm{T}_n\|_\infty \leqslant 1$.

— De plus, $|\mathrm{T}_n(1)| = 1$ donc $\|\mathrm{T}_n\|_\infty \geqslant 1$.

Finalement, on obtient $\|\mathrm{T}_n\|_\infty = 1$.

Commentaires: *Dire que cos était à valeurs dans $[-1\,;1]$ suffit simplement à conclure que $\|\mathrm{T}_n\|_\infty \leqslant 1$. Pour l'égalité, il fallait aussi montrer que ce sup / max était atteint. En 1 par exemple en vous servant justement de la question juste au-dessus.*

6 Soit $x \in [-1\,;1]$. On a $\mathrm{T}_0(x) = \cos(0) = 1 \quad$ et $\quad \mathrm{T}_1(x) = \cos(\arccos x) = x$.

Commentaires: *Remarquez bien que si on avait eu $\mathrm{T}_n(x) = \arccos(n\cos(x))$, on n'aurait pas du tout eu $\mathrm{T}_1(x) = \arccos(\cos(x)) = x$ pour tout x ! Les maths sont bien faites !*

7 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1\,;1]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+2}(x) + \mathrm{T}_n(x) &= \cos((n+2)\arccos(x)) + \cos(\arccos(x)) \\
&= 2\cos\left(\frac{(n+2)\arccos(x) + n\arccos(x)}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)\arccos(x) - n\arccos(x)}{2}\right) \\
&= 2\cos((n+1)\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\
&= 2x\mathrm{T}_{n+1}(x), \text{ ce qui donne le résultat.}
\end{aligned}$$

8 Soit $x \in [-1\,;1]$.

D'après la formule de récurrence précédente :

$$\mathrm{T}_2(x) = 2x\mathrm{T}_1(x) - \mathrm{T}_0(x) = 2x^2 - 1$$

et

$$\mathrm{T}_3(x) = 2x\mathrm{T}_2(x) - \mathrm{T}_1(x) = 2\left(2x^3 - x\right) - x = 4x^3 - 3x.$$

9 Posons $\mathcal{P}(n)$: « T_n est une fonction polynomiale ».

— C'est bien le cas pour $\mathrm{T}_0 : x \longmapsto 1$ et $\mathrm{T}_1 : x \longmapsto x$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Alors, puisque pour tout $x \in [-1\,;1]\,, \mathrm{T}_{n+2}(x) = 2x\mathrm{T}_{n+1}(x) - \mathrm{T}_n(x)$, on peut affirmer que T_{n+2} est bien une fonction polynomiale (car somme et produit de fonctions polynomiales. La propriété est héréditaire.

— Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale.

10 Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : $\mathcal{Q}(n)$:

« $\deg(\mathrm{T}_n) = n$ et que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}. »

On notera $\mathrm{CD}(\mathrm{T}_n)$, le coefficient dominant de T_n.

— Pour $n = 1$, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$ donc $\deg(\mathrm{T}_1) = 1$ et $\mathrm{CD}(\mathrm{T}_1) = 1 = 2^0$.

Pour $n = 2$, $\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1$ donc $\deg(\mathrm{T}_2) = 2$ et $\mathrm{CD}(\mathrm{T}_2) = 2 = 2^{2-1}$.

Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ sont vraies.

On a $\mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n$ donc $\deg(\mathrm{T}_{n+2}) = \deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n)$.

Or, $\deg(\mathrm{T}_n) = n < \deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_n) = \deg(\mathrm{X}) + \deg(\mathrm{T}_{n+1}) = n + 2$.

Ainsi, $\deg(\mathrm{T}_{n+2}) = \deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_n) = n + 2$

De plus, comme $\deg(\mathrm{T}_n) < \deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1})$), le coefficient dominant de T_{n+2} est celui du polynôme $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}$.

Or, on a :

$$\mathrm{CD}(\mathrm{T}_{n+2}) = \mathrm{CD}(2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}) = 2\mathrm{CD}(\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}) = 2\mathrm{CD}(\mathrm{T}_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

— En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(\mathrm{T}_n) = n$ et $\mathrm{CD}(\mathrm{T}_n) = 2^{n-1}$.

De plus, $\deg(\mathrm{T}_0) = 0$ et $\mathrm{CD}(\mathrm{T}_0) = 1$ et $\mathcal{Q}(0)$ est également vraie.

11 Comme $\theta \in [0\,;\pi]$, $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$ et $\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\arccos(\cos(\theta))) = \cos(n\theta)$.

12 (a) Pour tout θ de $\mathbb{R}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Expression entre fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (un polynôme et un cos).

On dérive cette égalité par rapport à θ et on obtient : $\sin(\theta)\mathrm{T}_n'(\cos(\theta)) = n\sin(n\theta)$.

En particulier, pour tout θ de $]0\,;\pi[$ et n de $\mathbb{N}$, $\sin(\theta) \neq 0$ et on a $\mathrm{T}_n'(\cos(\theta)) = \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

(b) Sur $]0\,;\pi[$,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n'(\cos(\theta)) = 0 &\iff \sin(n\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\theta) \neq 0 \text{ (condition assurée sur }]0\,;\pi[)\\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{n}\ [\pi] \ \text{ et } \ \theta \in]0\,;\pi[\\ &\iff \exists\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ \theta = \frac{k\pi}{n}.\end{aligned}$$

Le polynômes T_n' de degré $n-1$ possède donc $n-1$ racines $y_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$. Ce sont donc les seules et elles sont distinctes donc simples.

Le polynôme T_n' change donc de signe en chacune d'elles et T_n y présente donc un extremum :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ \mathrm{T}_n(y_k) = \mathrm{T}_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^n.$$

Commentaires:

— *On redémontre ici que $\|\mathrm{T}_n\|_\infty = 1$.*

— *Bien peu (personne, sic !) m'auront démontré que les y_k étaient effectivement des extrema. L'annulation de la dérivée ne suffit pas et ne fait de ces points que des points critiques !*

(c) Comme $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos(\theta) = 1$, il suffit de trouver un équivalent de $\mathrm{T}_n(\cos(\theta))$ pour $\theta \to 0$.

Or, $\dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0}{\sim} \dfrac{n^2\theta}{\theta} = n^2$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{T}_n'(x) = n^2$ qui est aussi la valeur de $\mathrm{T}_n'(1)$ car T_n' est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

13 Il suffit de dériver deux fois l'expression de 11 :

$$\begin{aligned}\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) &= \cos(n\theta)\\ \sin(\theta)\mathrm{T}_n'(\cos(\theta)) &= n\sin(n\theta)\\ -\sin^2(\theta)\mathrm{T}_n''(\cos(\theta)) + \cos(\theta)\mathrm{T}_n'(\cos(\theta)) &= n^2\mathrm{T}_n(\cos(\theta))\\ (1-\cos^2(\theta))\mathrm{T}_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)\mathrm{T}_n'(\cos(\theta)) + n^2\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) &= 0.\end{aligned}$$

Quand θ parcourt $\mathbb{R}$, $x = \cos(\theta)$ parcourt $[-1\,;1]$ donc :

$$\forall\, x \in [-1\,;1]\,,\ (1-x^2)\mathrm{T}_n''(x) - x\mathrm{T}_n' + n^2\mathrm{T}_n(x) = 0.$$

14 (a) Soit $\theta \in [0\,;\pi]$. On a :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)=0 &\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \theta = \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{n}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}\\ &\iff \exists k\in[\![0\,;n-1]\!]\,, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \qquad \text{car } \theta\in[0\,;\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble solution est :

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k\in[\![0\,;n-1]\!]\right\}.$$

(b) On sait que pour tout $\theta \in [0\,;\pi]\,, \mathrm{T}_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$.
Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $k\in[\![0\,;n-1]\!]$,

$$\mathrm{T}_n\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)=0.$$

Les $x_k=\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $k\in[\![0\,;n-1]\!]$ sont racines de T_n.

Or, pour $k\in[\![0\,;n]\!]$, les $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0\,;\pi]$, intervalle sur le quel cos est injective (car strictement décroissante). Les racines x_k sont donc au nombre de $n=\deg(\mathrm{T}_n)$. On les a donc toutes et T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ (ses n racines sont bien réelles).

(c) Comme le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} (par la question précédente) la forme factorisée de T_n est :

$$\mathrm{T}_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X}-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).$$

(d) On utilise les relations coefficients racines dont celle qui donne le produit des racines avec $\mathrm{T}_n(0)=\begin{cases}(-1)^{n/2} \text{ si } n \text{ est pair,}\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$ et $\mathrm{CD}(\mathrm{T}_n)=2^{n-1}$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair}\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$