Dimension finie

Une seule réponse exacte par question.

Dans toutes les questions, sauf mention contraire, E *est un espace vectoriel réel de dimension finie* $n \geqslant 1$.

1 Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

Laquelle des conditions suivantes permet de dire que cette famille est liée ?

- (a) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ engendre E
- (b) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$ engendre E
- (c) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ n'engendre pas E
- (d) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$ n'engendre pas E

2 On considère $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (1,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors la famille (e_1, e_2, e_3) est

- (a) ☐ génératrice mais pas libre
- (b) ☐ libre mais pas génératrice
- (c) ☐ une base
- (d) ☐ ni libre, ni génératrice

3 Soit $E = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Alors

- (a) ☐ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 1
- (b) ☐ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2
- (c) ☐ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3
- (d) ☐ E n'est pas un $\mathbb{R}$-ev

4 Soit E un espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E. Alors

- (a) ☐ E est de dimension finie et $\dim E = p$
- (b) ☐ E est de dimension finie et $\dim E \leqslant p$
- (c) ☐ E est de dimension finie et $\dim E \geqslant p$
- (d) ☐ E n'est pas nécessairement de dimension finie

5 Soit F un sous-espace vectoriel de E. Quelle affirmation est vraie ?

- (a) ☐ toute base de E contient une base de F
- (b) ☐ toute base de F est contenue dans une base de E
- (c) ☐ toute famille génératrice de E contient une famille génératrice de F
- (d) ☐ toute base de E contient une famille génératrice de F

6 Soient F, G, G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G = F \oplus G'$.

A quelle condition peut-on dire que $G = G'$?

- (a) ☐ C'est toujours le cas
- (b) ☐ Si $G \subset G'$
- (c) ☐ Si F est non nul
- (d) ☐ Si $G + G' = E$

7 Soit E un espace vectoriel dans lequel toute famille de 3 vecteurs est liée. Alors

- (a) ☐ E est forcément de dimension finie et $\dim E \leqslant 3$
- (b) ☐ E est forcément de dimension finie et $\dim E \leqslant 2$
- (c) ☐ E est forcément de dimension finie et $\dim E \geqslant 3$
- (d) ☐ E n'est pas forcément de dimension finie

8 Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$.

Lequel des sous-espaces suivants n'est pas un supplémentaire de la droite $\mathrm{vect}\,(e_1)$?

a ☐ vect (e_2, e_3)
b ☐ vect $(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$
c ☐ vect $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$
d ☐ vect $(e_2 + e_3, e_2 - e_3)$

9 Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace E de dimension 3 et P un plan de E.

À quelle condition (e_1, e_2) est une base de P ?

a ☐ lorsque e_3 n'est pas dans P
b ☐ lorsque e_1 et e_2 sont dans P
c ☐ lorsque e_3 est dans vect (e_1, e_2).
d ☐ lorsque (e_1, e_2, e_3) est génératrice de P.

10 Soit F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^6$ de dimensions respectives p et q.

Dans lequel des cas suivants peut-on trouver à coup sûr un vecteur non nul dans $F \cap G$?

a ☐ $p = 4$ et $q = 2$
b ☐ $p = 3$ et $q = 4$
c ☐ $p = 2$ et $q = 4$
d ☐ $p = 1$ et $q = 2$

11 Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ deux bases de E.

La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ peut être complétée en une base

a ☐ uniquement par le vecteur e_n
b ☐ par n'importe lequel des vecteurs $f_1, f_2, \ldots, f_n$
c ☐ par au moins un des vecteurs $f_1, f_2, \ldots, f_n$
d ☐ par aucun des vecteurs de la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$

12 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des vecteurs de E.

Laquelle des conditions suivantes assure que x_p est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$

a ☐ la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est liée
b ☐ la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ est libre
c ☐ la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ est libre et la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est liée
d ☐ la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ est liée et la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est libre

13 On suppose que (e_1, e_2, e_3) engendre l'espace vectoriel E.

Laquelle des conditions suivantes assure que E est de dimension 3 ?

a ☐ (e_1, e_2) est libre
b ☐ les familles $(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3)$ sont libres
c ☐ (e_1, e_2) n'engendre pas E
d ☐ les familles $(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3)$ n'engendrent pas E

14 Soient e_1, e_2, e_3, e_4 des vecteurs de E. On suppose que les familles (e_1, e_2, e_3) et (e_3, e_4) sont libres.

La dimension de E est forcément supérieure ou égale à

a ☐ 2
b ☐ 3
c ☐ 4
d ☐ 5

15 Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives p et q et tels que $F + G = E$.

La dimension d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F est :

(a) ☐ q (b) ☐ 0 (c) ☐ $n-q$ (d) ☐ $n+q$

16 Soient F, G deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. La dimension p de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ peut valoir

(a) ☐ 1 ou 2 (b) ☐ $1, 2$ ou 3 (c) ☐ $0, 1$ ou 2 (d) ☐ $0, 1, 2$ ou 3

17 Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille libre de G. Quelle condition suffit pour dire que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre ?

(a) ☐ $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$
(b) ☐ $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$
(c) ☐ $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$
(d) ☐ $g_1, \dots, g_q$ ne sont pas dans F et $f_1, \dots, f_p$ ne sont pas dans G.