Espaces vectoriels et Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

1 Laquelle des applications suivantes est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

a ☐ $(x,y) \mapsto x$
c ☐ $(x,y) \mapsto x+y+1$
b ☐ $(x,y) \mapsto xy$
d ☐ $(x,y) \mapsto (x+y)(x-y)$

2 Quel est le nombre de supplémentaires de la droite $D = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^2$?

a ☐ 0 b ☐ 1 c ☐ 2 d ☐ une infinité

3 Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

a ☐ l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$
b ☐ l'ensemble des fonctions paires
c ☐ l'ensemble des fonctions croissantes
d ☐ l'ensemble des fonctions polynomiales

4 Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

a ☐ $(x,y) \mapsto (y,x)$
c ☐ $(x,y) \mapsto (0,x)$
b ☐ $(x,y) \mapsto (1,0)$
d ☐ $(x,y) \mapsto (0,y)$

5 Soient E, F deux espaces vectoriels réels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On pose $A = u(\text{vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_p))$ et $B = \text{vect}\,(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_p))$. Alors

a ☐ $A \subset B$ b ☐ $B \supset A$ c ☐ $A = B$ d ☐ $A \cap B = \{0\}$

6 Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle des fonctions suivantes est combinaison linéaire des fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$.

a ☐ $x \mapsto (1+x^2)^2$
c ☐ $x \mapsto (x+1)(x-2)$
b ☐ $x \mapsto \sin x$
d ☐ $x \mapsto xe^x$

7 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

a ☐ $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$
c ☐ $\text{Im } u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$
b ☐ $\text{Im } u \supset \text{Im } u^2$
d ☐ $\text{Im } u + \text{Im } u^2 = E$

8 Laquelle des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ?

a ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$
c ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$
b ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y + x = 1\}$
d ☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$

9 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = I_d$, que vaut $(u^2+u)^2$?

a ☐ $2I_d$ b ☐ $2u$ c ☐ $2I_d + 2u$ d ☐ $I_d + u^2$

10 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker(u) \subset \ker(v)$ alors pour tout x dans E,

a ☐ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$
c ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
b ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$
d ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

11 Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F.

a ☐ $v \in \mathcal{L}(F)$
c ☐ $v \in \mathcal{L}(E,F)$
b ☐ $v \in \mathcal{L}(F,E)$
d ☐ v n'est pas forcément linéaire

12 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

a ☐ si $\ker(u) = F$
c ☐ si $F \cap \ker(u) = \{0\}$
b ☐ si $F \not\subset \ker(u)$
d ☐ si $F \cap \ker(u) = \varnothing$

13 Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas linéaire ?

a ☐ $f \mapsto g \circ f$ b ☐ $f \mapsto f \circ g$ c ☐ $f \mapsto f + g$ d ☐ $f \mapsto g \circ f \circ g$

14 Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :

a ☐ λx^n b ☐ $\lambda^n x$ c ☐ λx d ☐ $\lambda^n x^n$

15 Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

a ☐ $\ker(u) \subset \ker(u)^2$
c ☐ $\ker(u) = \ker(u)^2$
b ☐ $\ker(u) \supset \ker(u)^2$
d ☐ $\ker(u) \cap \ker(u)^2 = \{0\}$

16 Lequel des ensembles suivants de $\mathcal{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

a ☐ l'ensemble des projecteurs
b ☐ l'ensemble des symétries
c ☐ l'ensemble des endomorphismes non nuls
d ☐ l'ensemble des homothéties