

Espaces vectoriels et Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

- 1 Laquelle des applications suivantes est linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ?
- a $(x, y) \mapsto x$ c $(x, y) \mapsto x + y + 1$
 b $(x, y) \mapsto xy$ d $(x, y) \mapsto (x + y)(x - y)$
- 2 Quel est le nombre de supplémentaires de la droite $D = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ dans \mathbb{R}^2 ?
- a 0 b 1 c 2 d une infinité
- 3 Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?
- a l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$
 b l'ensemble des fonctions paires
 c l'ensemble des fonctions croissantes
 d l'ensemble des fonctions polynomiales
- 4 Laquelle des applications suivantes est un projecteur de \mathbb{R}^2 ?
- a $(x, y) \mapsto (y, x)$ c $(x, y) \mapsto (0, x)$
 b $(x, y) \mapsto (1, 0)$ d $(x, y) \mapsto (0, y)$
- 5 Soient E, F deux espaces vectoriels réels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et (e_1, e_2, \dots, e_p) une famille de vecteurs de E . On pose $A = u(\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_p))$ et $B = \text{vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$. Alors
- a $A \subset B$ b $B \supset A$ c $A = B$ d $A \cap B = \{0\}$
- 6 Dans l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , laquelle des fonctions suivantes est combinaison linéaire des fonctions $f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$.
- a $x \mapsto (1 + x^2)^2$ c $x \mapsto (x + 1)(x - 2)$
 b $x \mapsto \sin x$ d $x \mapsto xe^x$
- 7 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Quelle propriété est toujours vérifiée?
- a $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$ c $\text{Im } u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$
 b $\text{Im } u \supset \text{Im } u^2$ d $\text{Im } u + \text{Im } u^2 = E$
- 8 Laquelle des parties suivantes de \mathbb{R}^2 est un sous-espace vectoriel?

- a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$ c $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$
 b $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y + x = 1\}$ d $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$
- 9 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = I_d$, que vaut $(u^2 + u)^2$?
- a $2I_d$ b $2u$ c $2I_d + 2u$ d $I_d + u^2$
- 10 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker(u) \subset \ker(v)$ alors pour tout x dans E ,
- a $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$ c $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
 b $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$ d $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$
- 11 Soit F un sous-espace vectoriel de E , u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F .
- a $v \in \mathcal{L}(F)$ c $v \in \mathcal{L}(E, F)$
 b $v \in \mathcal{L}(F, E)$ d v n'est pas forcément linéaire
- 12 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective?
- a si $\ker(u) = F$ c si $F \cap \ker(u) = \{0\}$
 b si $F \not\subset \ker(u)$ d si $F \cap \ker(u) = \emptyset$
- 13 Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas linéaire?
- a $f \mapsto g \circ f$ b $f \mapsto f \circ g$ c $f \mapsto f + g$ d $f \mapsto g \circ f \circ g$
- 14 Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :
- a λx^n b $\lambda^n x$ c λx d $\lambda^n x^n$
- 15 Si u est un endomorphisme de E , on a toujours
- a $\ker(u) \subset \ker(u)^2$ c $\ker(u) = \ker(u)^2$
 b $\ker(u) \supset \ker(u)^2$ d $\ker(u) \cap \ker(u)^2 = \{0\}$
- 16 Lequel des ensembles suivants de $\mathcal{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?
- a l'ensemble des projecteurs
 b l'ensemble des symétries
 c l'ensemble des endomorphismes non nuls
 d l'ensemble des homothéties