Géométrie de l'espace & Espaces vectoriels

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace. Toutes les coordonnées qui apparaissent dans l'énoncé sont relatives au repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1 : On note $\mathcal{D}'$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{a} = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$, $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y+z=0$ et enfin, pour tout réel m, on note $\mathcal{P}_m$ le plan d'équation $x+my-mz=1$.

1. (a) Donner un vecteur normal $\vec{n}_m$ de $\mathcal{P}_m$ ainsi qu'un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
   (b) Vérifier que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.
2. (a) Calculer $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{a}$. En déduire que $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$.
   (b) On appelle alors $\mathcal{R}_m$ l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.
   Obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$.
3. Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de I_m point d'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$.
4. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation
$$x^2+y^2+z^2=x.$$
   Préciser la nature géométrique de $\mathcal{S}$ ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.
5. Vérifier que I_m appartient à $\mathcal{S}$ puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
6. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M de $\mathcal{E}$ par lesquels passe un et un seul plan P_m.
   (b) Quelle est la réunion des plans $\mathcal{P}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

Problème 2 : Dans tout ce problème, E et F désignent deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
De plus, pour tout application linéaire f de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on note

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_f &= \{h \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}),\ f\circ h\circ f = 0\}, \\ \mathrm{B}_f &= \{h \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}),\ \mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(h)\} \\ \text{et } \mathrm{C}_f &= \{h \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}),\ \mathrm{Im}\,(h) \subset \ker(f)\}. \end{aligned}$$

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie 1

Dans cette partie seulement, on pose $\mathrm{E}=\mathrm{F}=\mathbb{R}^2$ et

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & & (2x-4y,-3x+6y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & & (2x-2y,x-y) \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
3. Déterminer $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(v)$.
4. Montrer que $g \in \mathrm{A}_f$.

Partie 2

On note $\mathrm{T}_f : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) & \longmapsto & \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \\ h & & f\circ h\circ f. \end{array}$

1. Montrer que T_f est bien définie et linéaire.
2. Montrer que A_f est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. (a) Montrer que $\mathrm{B}_f \subset \mathrm{A}_f$.
   (b) Montrer que si f est injective alors $\mathrm{B}_f = \mathrm{A}_f$.
4. (a) Montrer que $\mathrm{C}_f \subset \mathrm{A}_f$.
   (b) Montrer que si f est surjective alors $\mathrm{C}_f = \mathrm{A}_f$.
5. Montrer que si f est bijective alors T_f est bijective.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une application linéaire g de $\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ telle que

$$f\circ g\circ f = f \quad \text{et} \quad g\circ f\circ g = g.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de F.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans F.