Géométrie de l'espace & Espaces vectoriels

Exercice 1 :

1 (a) Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_m$ est $x+my-mz=1$ donc le vecteur $\vec{n}_m\begin{pmatrix}1\\m\\-m\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_m$.
Par ailleurs, la droite $\mathcal{D}$ est définie comme intersection de deux plans dont des équations cartésiennes sont $y-z=0$ et $x-1=0$ et dont les vecteurs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ en sont des vecteurs normaux respectifs.

Par conséquent, $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Le vecteur $-\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Il est clair que le point $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ appartient aux deux plans donc à $\mathcal{D}$.

Commentaires: *Une autre méthode moins jolie mais plus efficace est de résoudre le système cartésien :*

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{D}\iff\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}\iff\begin{cases}x= & 1\\y= & y\\z= & y\end{cases}\iff\mathrm{M}\in\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

On retrouve directement un point et un vecteur directeur.

(b) Soient $m\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{M}\begin{pmatrix}x_\mathrm{M}\\y_\mathrm{M}\\z_\mathrm{M}\end{pmatrix}$ un point de la droite $\mathcal{D}$.

Par définition de $\mathcal{D}$, on a $\begin{cases}y_\mathrm{M}=z_\mathrm{M}\\x_\mathrm{M}=1\end{cases}$ de quoi l'on tire immédiatement

$$x_\mathrm{M}+my_\mathrm{M}-mz_\mathrm{M}=1.$$

Par conséquent, M appartient au plan $\mathcal{P}_m$ et la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}_m$.

Commentaires: *Montrer que* $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{P}_m$ *et* $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\perp\vec{n}_m$ *pour tout* $m\in\mathbb{R}$ *convient aussi.*

2 (a) Les coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Par conséquent, les coordonnées de $\vec{r}_m=\vec{n}_m\wedge\vec{a}$ sont $\begin{pmatrix}2m\\-1-m\\1-m\end{pmatrix}$.

On remarque immédiatement que $\vec{r}_m\neq\vec{0}$ (il y a toujours au moins une coordonnée non nulle) donc $\vec{n}_m$ et $\vec{a}$ sont non colinéaires et la droite $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$.

(b) Par définition de $\mathcal{R}_m$, les vecteurs non colinéaires $\vec{n}_m$ et $\vec{a}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{R}_m$.

Par ailleurs, comme $\mathcal{R}_m$ contient $\mathcal{D}'$ qui passe par O, on en déduit que $\mathcal{R}_m = \mathrm{O} + \mathrm{vect}\left(\vec{n}_m, \vec{a}\right)$.

Le vecteur $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{a}$ se retrouve être un vecteur normal de $\mathcal{R}_m$ qui a pour équation

$$2mx - (m+1)y + (1-m)z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Comme $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0) \in \mathcal{R}_m$, on trouve immédiatement $d = 0$.

Finalement,

$$\mathcal{R}_m : \ 2mx - (m+1)y + (1-m)z = 0.$$

3 Soit $m \in \mathbb{R}$. Les coordonnées $\begin{pmatrix} x_\mathrm{I} \\ y_\mathrm{I} \\ z_\mathrm{I} \end{pmatrix}$ de I_m vérifient les équations cartésiennes des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$ donc sont solutions du système :

$$\begin{cases} y_\mathrm{I} + z_\mathrm{I} = 0 \\ x_\mathrm{I} + my_\mathrm{I} - mz_\mathrm{I} = 1 \\ 2mx_\mathrm{I} - (m+1)y_\mathrm{I} + (1-m)z_\mathrm{I} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_\mathrm{I} = -y_\mathrm{I} \\ x_\mathrm{I} = 1 - 2my_\mathrm{I} \\ 2m(1-2my_\mathrm{I}) - (m+1)y_\mathrm{I} + (m-1)y_\mathrm{I} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_\mathrm{I} = -y_\mathrm{I} \\ x_\mathrm{I} = 1 - 2my_\mathrm{I} \\ y_\mathrm{I} = \dfrac{m}{1+2m^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_\mathrm{I} = \dfrac{1}{1+2m^2} \\ y_\mathrm{I} = \dfrac{m}{1+2m^2} \\ z_\mathrm{I} = -\dfrac{m}{1+2m^2}. \end{cases}$$

Donc, $$\mathrm{I} = \frac{1}{1+2m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}.$$

4 L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$ se réécrit

$$x^2 + y^2 + z^2 = x \iff x^2 - x + y^2 + z^2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 + z^2 = 0$$
$$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

5 En reprenant le résultat de la question 3, on obtient que les coordonnées $\begin{pmatrix} x_\mathrm{I} \\ y_\mathrm{I} \\ z_\mathrm{I} \end{pmatrix}$ de I_m vérifient

$$x_\mathrm{I}^2 + y_\mathrm{I}^2 + z_\mathrm{I}^2 = \left(\frac{1}{1+2m^2}\right)^2 + \left(\frac{m}{1+2m^2}\right)^2 + \left(-\frac{m}{1+2m^2}\right)^2 = \frac{1+2m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{1}{1+2m^2} = x_\mathrm{I}.$$

Par conséquent, le point I_m appartient à $\mathcal{S}$.

Par ailleurs, les coordonnées de Ω vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{Q}$ donc le centre de la sphère Ω appartient à $\mathcal{Q}$.

On en déduit que $\mathcal{Q}$ est sécant avec la sphère en un cercle, dit équatorial.

Comme le point I_m appartient également au plan $\mathcal{Q}$ d'après la question 3, il appartient à ce cercle qui est donc le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$, celui de la sphère.

6 (a) Soit $\mathrm{M}_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$. On détermine quels sont les plans P_m contenant M_0 :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_0 \in \mathcal{P}_m &\iff x_0 + my_0 - mz_0 = 1 \iff m(y_0 - z_0) = 1 - x_0 \\ &\iff \begin{cases} m = \dfrac{1 - x_0}{y_0 - z_0} & \text{si } y_0 - z_0 \neq 0 \\ m \text{ quelconque} & \text{si } y_0 - z_0 = 0 \text{ et } x_0 = 1, \text{ ie si } \mathrm{M}_0 \in \mathcal{D} \\ \text{impossible} & \text{si } y_0 - z_0 = 0 \text{ et } x_0 \neq 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Autrement dit, on a M qui appartient à un unique plan $\mathcal{P}_m$ si et seulement si $y_0 - z_0 \neq 0$.

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{F}$ des points de $\mathcal{E}$ qui appartiennent à un unique plan $\mathcal{P}_m$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ qui n'appartiennent pas au plan d'équation $y - z = 0$.

(b) D'après les résultats de la question précédente, l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ qui appartiennent à plusieurs plans $\mathcal{P}_m$ est la droite $\mathcal{D}$.

Par conséquent, la réunion des plans $\mathcal{P}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est l'ensemble $\mathcal{F} \cup \mathcal{D}$.

Problème 2 :

Partie 1

1 Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y')$.

Dès lors, on a :

$$\begin{aligned}f(\alpha u + \beta v) =& f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (2(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha y + \beta y'), -3(\alpha x + \beta x') + 6(\alpha y + \beta y')) \\ =& (\alpha(2x - 4y) + \beta(2x' - 4y'), \alpha(-3x + 6y) + \beta(-3x' + 6y')) \\ =& \alpha(2x - 4y, -3x + 6y) + \beta(2x' - 4y', -3x' + 6y') \\ =& \alpha f(x, y) + \beta f(x', y') = \alpha f(u) + \beta f(v)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}g(\alpha u + \beta v) =& g(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (2(\alpha x + \beta x') - 2(\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y')) \\ =& (\alpha(2x - 2y) + \beta(2x' - 2y'), \alpha(x - y) + \beta(x' - y')) \\ =& \alpha(2x - 2y, x - y) + \beta(2x' - 2y', x' - y') \\ =& \alpha g(x, y) + \beta g(x', y') = \alpha g(u) + \beta g(v).\end{aligned}$$

Les fonctions f et g sont donc linéaires.

2 Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a :

$$\begin{aligned}w \in \ker(f) &\iff f(w) = 0 \iff (2x - 4y, -3x + 6y) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases} \iff x = 2y \\ &\iff w = (2y, y) = y(2, 1) \iff w \in \mathrm{Vect}((2, 1)).\end{aligned}$$

En posant $u = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

3 On remarque d'ores et déjà que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = (2(x - 2y), -3(x - 2y)) = (x - 2y) \cdot (2, -3).$$

Donc, en posant $v = (2, -3)$, on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(v)$.

Soit $w \in \text{Vect}(v)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = (2\lambda, -3\lambda)$.

On peut écrire :

$$w = (2\lambda, -3\lambda) = f(\lambda, 0) \quad \text{donc} \quad w \in \text{Im}(f).$$

Ainsi $\text{Vect}(v) \subset \text{Im}\,(f)$ et par double inclusion, on obtient $\text{Im}\,(f) = \text{Vect}(v)$.

4 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a :

$$\begin{aligned} f \circ g \circ f(x,y) &= f \circ g(f(x,y)) = f \circ g(2x-4y, -3x+6y) = f(g(2x-4y, -3x+6y)) \\ &= f(2(2x-4y) - 2(-3x+6y), (2x-4y) - (-3x+6y)) = f(10x-20y, 5x-10y) \\ &= (2(10x-20y) - 4(5x-10y), -3(10x-20y) + 6(5x-10y)) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

donc $f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$, *i.e.* g appartient à A_f.

Partie 2

1 Soient $(h_1, h_2) \in \mathscr{L}(F, E)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction f étant linéaire, on a :

$$\begin{aligned} T_f(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) &= f \circ (\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) \circ f = f \circ (\lambda_1 \cdot h_1 \circ f + \lambda_2 \cdot h_2 \circ f) \\ &= \lambda_1 \cdot f \circ h_1 \circ f + \lambda_2 \cdot f \circ h_2 \circ f \\ &= \lambda_1 \cdot T_f(h_1) + \lambda_2 \cdot T_f(h_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application T_f est une application linéaire.

2 $A_f = \ker(T_f)$ donc A_f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(F, E)$ en tant que noyau d'une application linéaire.

3 a Soit $h \in B_f$ donc $\text{Im}\,(f) \subset \ker(h)$. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in \text{Im}\,(f) \subset \ker(h)$ donc

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = 0 \text{ puis } f \circ h \circ f(x) = f(h \circ f(x)) = f(0) = 0.$$

Par conséquent, l'application $f \circ h \circ f$ est la fonction nulle, *i.e.* $f \circ h \circ f = 0$.

Il s'ensuit $h \in A_f$ de quoi l'on déduit $B_f \subset A_f$.

b On a déjà montré lors de la question précédente $B_f \subset A_f$.

On montre maintenant l'inclusion $A_f \subset B_f$ sous l'hypothèse f injective, *i.e.* $\ker(f) = \{0\}$.

Soit $h \in A_f$. Montrons que $\text{Im}\,(f) \subset \ker(h)$.

Soit $y \in \text{Im}\,(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Dès lors,

$$f(h(y)) = f(h(f(x))) = f \circ h \circ f(x) = 0 \ \text{ car } h \in A_f.$$

On obtient $h(y) \in \ker(f)$. La fonction f étant injective, on a $\ker(f) = \{0\}$ donc $h(y) = 0$, ie $y \in \ker(h)$. Il s'ensuit $\text{Im}\,(f) \subset \ker(h)$, autrement dit $h \in B_f$.

Par double inclusion, si f est injective, on a $A_f = B_f$.

4 a Soit $h \in C_f$, ie $\text{Im}\,(h) \subset \ker(f)$. Pour tout $y \in F$, on a $h(y) \in \text{Im}\,(h) \subset \ker(f)$, donc $f \circ h(y) = f(h(y)) = 0$. Dès lors, pour tout $x \in E$, on a

$$f \circ h \circ f(x) = f \circ h(\underbrace{f(x)}_{\in F}) = 0.$$

Par conséquent, l'application $f \circ h \circ f$ est la fonction nulle, ie $f \circ h \circ f = 0$. Il s'ensuit $h \in A_f$ de quoi l'on déduit $C_f \subset A_f$.

(b) On a déjà montré lors de la question précédente $C_f \subset A_f$. On montre maintenant l'inclusion $A_f \subset C_f$ sous l'hypothèse f surjective.

Soit $h \in A_f$. Montrons que $\mathrm{Im}\,(h) \subset \ker(f)$. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(h)$. Il existe $y \in F$ tel que $x = h(y)$. On a $y \in F$ et f surjective donc il existe $x' \in E$ tel que $y = f(x')$. Dès lors,

$$f(x) = f(h(y)) = f(h(f(x'))) = f \circ h \circ f(x') = 0 \text{ car } h \in A_f.$$

On obtient ainsi $x \in \ker(f)$. Il s'ensuit $\mathrm{Im}\,(h) \subset \ker(f)$, autrement dit $h \in C_f$.

Par double inclusion, si f est surjective, on a $A_f = B_f$.

5. Si f est bijective alors il existe $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

On définit alors

$$T_{f-1} : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longmapsto & \mathscr{L}(F,E) \\ h & & f^{-1} \circ h \circ f^{-1}. \end{array}$$

Dès lors, on a $T_f \circ T_{f^{-1}} : \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{L}(E,F)$ et pour tout $h \in \mathscr{L}(E,F)$, on a

$$\begin{aligned} T_f \circ T_{f^{-1}}(h) &= T_f(f^{-1} \circ h \circ f^{-1}) = f \circ (f^{-1} \circ h \circ f^{-1}) \circ f = (f \circ f^{-1}) \circ h \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= \mathrm{Id}_F \circ h \circ \mathrm{Id}_E = h \end{aligned}$$

donc $T_f \circ T_{f^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E,F)}$. De même, pour tout $h \in \mathscr{L}(F,E)$, on a

$$\begin{aligned} T_{f^{-1}} \circ T_f(h) &= T_{f^{-1}}(f \circ h \circ f) = f^{-1} \circ (f \circ h \circ f) \circ f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ h \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= \mathrm{Id}_E \circ h \circ \mathrm{Id}_F = h \end{aligned}$$

donc $T_{f^{-1}} \circ T_f = \mathrm{Id}_{\mathscr{L}(F,E)}$. Par conséquent, T_f est une application bijective.

Partie 3

1. Le noyau et l'image d'une application linéaire étant des espaces vectoriels, on déduit que $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de F.

2. **Méthode 1 :**

— On montre $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g)$. On a $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, on a $y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0$. Alors

$$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f \circ g(f(x)) = f \circ g(y) = f(g(y)) = f(0) = 0.$$

Ainsi, on obtient $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) \subset \{0\}$. L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g)$ étant toujours vraie, il vient par double inclusion $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

— On montre $\mathrm{Im}\,(f) + \ker(g) = F$. Soit $y \in F$.

Analyse : Supposons qu'il existe $b \in \mathrm{Im}\,(f)$ et $b' \in \ker(g)$ tel que $y = b + b'$.

On a $b \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc il existe $a \in E$ tel que $b = f(a)$.

Dès lors,

$$b = f(a) = f \circ g \circ f(a) = f(g(y - b')) = f(g(y)) - f(g(b')) = f(g(y)) - 0 = f \circ g(x) \quad \text{car } b' \in \ker(g)$$

puis $b' = y - b = y - f \circ g(y)$.

Synthèse : On pose $b = f \circ g(y)$ et $b' = y - f \circ g(y)$.

Ce faisant :

- on a $b + b' = f \circ g(y) + y - f \circ g(y) = y$,
- on a $b = f \circ g(y) = f(g(y)) \in \operatorname{Im}(f)$,
- on a $g(b') = g(y - f \circ g(y)) = g(y) - g \circ f \circ g(y) = g(y) - g(y) = 0$ donc $b' \in \ker(g)$.

Par conséquent, on a $y \in \operatorname{Im}(f) + \ker(g)$ puis $\mathrm{F} \subset \operatorname{Im}(f) + \ker(g)$.

Par ailleurs, $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(g)$ étant des sous-espaces vectoriels de F, on a également $\operatorname{Im}(f) + \ker(g) \subset \mathrm{F}$.

Par double inclusion, il vient $\operatorname{Im}(f) + \ker(g) = \mathrm{F}$.

- On a ainsi $\operatorname{Im}(f) + \ker(g) = \mathrm{F}$ et $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ donc $\operatorname{Im}(f) \oplus \ker(g) = \mathrm{F}$.

  Autrement dit, $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans F.

Méthode 2 :

- L'application $f \circ g : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ est linéaire en tant que composée d'applications linéaires et de plus, elle vérifie

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ g.$$

  Par conséquent, l'endomorphisme $f \circ g$ est la projection sur $\operatorname{Im}(f \circ g)$ de direction $\ker(f \circ g)$.

  En particulier, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(f \circ g)$ et $\ker(f \circ g)$ sont supplémentaires dans F, ie $\operatorname{Im}(f \circ g) \oplus \ker(f \circ g) = \mathrm{F}$.

- On montre que $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f)$. On a toujours $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im}(f)$. Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Sachant que $f = f \circ g \circ f$, il vient

$$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f \circ g(f(x)) \in \operatorname{Im}(f \circ g).$$

  Ainsi, on a $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, on obtient $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ g)$.

- On montre que $\ker(f \circ g) = \ker(g)$.

  On a toujours $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$.

  Réciproquement, soit $x \in \ker(f \circ g)$ ie $f \circ g(x) = 0_{\mathrm{F}}$. Sachant que $g = g \circ f \circ g$, on a :

$$g(x) = g \circ f \circ g(x) = g(f \circ g(x)) = g(0_{\mathrm{F}}) = 0_{\mathrm{E}} \text{ donc } x \in \ker(g).$$

  On a ainsi $\ker(f \circ g) \subset \ker(g)$. Par double inclusion, on obtient $\ker(g) = \ker(f \circ g)$.

- Par conséquent, on a $\operatorname{Im}(f \circ g) \oplus \ker(f \circ g) = \mathrm{F}$, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ g)$ et $\ker(g) = \ker(f \circ g)$ donc

$$\operatorname{Im}(f) \oplus \ker(g) = \mathrm{F}.$$