Dimension finie

Exercice 1 : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \Big(X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1)\Big)$ est une base de E et déterminer les coordonnées de 1 dans cette base.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.
   a) Montrer que, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, F_a est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
   b) Déterminer une base de $F_1 \cap F_{-1}$.
   c) Montrer que $F_0 = \mathrm{vect}\,\Big(X(X-1), X(X+1)\Big)$.
   d) Montrer que $F_0 \oplus H = E$ avec $H = F_1 \cap F_{-1}$.

Exercice 2 : On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ et $F = \Big\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / AM = 0_2\Big\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En exhibant une base, déterminer $\dim(F)$.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F = \Big\{f \in E / f'(0) = f'(1)\Big\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F \oplus \mathrm{vect}\,(\arctan(x)) = E$.