Dimension finie

Exercice 1 :

1 Famille de 3 éléments dans un espace de dimension 3, il suffit d'en montrer la liberté.

Soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aX(X-1)+bX(X+1)+c(X-1)(X+1)=0$.

En évaluant l'expression polynomiale associée en 0, 1 et -1, on obtient alors le système trivial :

$$\begin{cases} -c=0 \\ 2b=0 \\ 2a=0 \end{cases} \iff a=b=c=0.$$

La famille est libre dans E donc en forme une base d'après la remarque liminaire.

Reste à trouver le triplet $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées de $1 \in E$ dans cette base.

Commentaires: *On sait qu'il existe d'après le côté générateur et, qu'une fois trouvé, il sera unique par liberté de la base.*

Un tel triplet vérifie :

$$1 = aX(X-1)+bX(X+1)+c(X-1)(X+1).$$

En évaluant (trop long de développer et identifier !) en les mêmes points 0, 1 et -1, on obtient :

$$\begin{cases} 1=-c \\ 1=2b \\ 1=2a \end{cases} \iff 1 = \frac{1}{2}X(X-1)+\frac{1}{2}X(X+1)-1(X-1)(X+1)$$

$$\iff 1\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)_{\mathcal{B}}.$$

2 (a) Il est déjà clair que le polynôme nul admette au moins a comme racine donc F_a n'est pas vide.

Il est tout aussi clair que si a est racine de P et Q, il le sera aussi du polynôme $\lambda P+Q$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Non vide et stable par combinaisons linéaires, le sous-ensemble F_a de E en est un sous-espace.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\left(1, X-a, (X-a)^2\right)$ forme une base de E.

Dans cette base, tout polynôme P de F_a s'écrit $P = \lambda(X-a)+\mu(X-a)^2$.

Donc $F_a \subset \operatorname{vect}\left(X-a, (X-a)^2\right)$.

Réciproquement, les polynômes $X-a$ et $(X-a)^2$ sont éléments de F_a *i.e.* $\operatorname{vect}\left(X-a, (X-a)^2\right) \subset F_a$ et l'égalité.

Le sev F_a est donc de dimension 2.

(b) Soit $P = aX^2+bX+c \in E$. Alors,

$$P \in F_1 \cap F_{-1} \iff \begin{cases} P(1)=0 \\ P(-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \\ b=0 \\ c=-a \end{cases}$$

$$\iff P = a\left(X^2-1\right)$$

$$\iff P \in \operatorname{vect}\left(X^2-1\right)$$

Au final, $F_1 \cap F_{-1} = \text{vect}\left((X-1)(X+1)\right)$.

La famille $\Big((X-1)(X+1)\Big)$ réduite à un seul élément est libre et génératrice de $F_1 \cap F_{-1}$. Elle en forme une base. En particulier, $\dim\left(F_1 \cap F_{-1}\right) = 1$.

Commentaires:

- *Un polynôme de degré 2 qui admet 1 et −1 comme racine, n'est pas nécessairement le polynôme $(X-1)(X+1)$! Le polynôme nul convient et tous les polynômes associés à $(X-1)(X+1)$ aussi.*
- *Je rappelle, qu'à condition de bien stipuler qu'il est non nul, une famille de 1 vecteur est toujours libre !*
- *Ne m'invoquez pas une famille échelonnée par les degrés lorsqu'il n'y a qu'un polynôme !*

(c) **1ère méthode :** Un raisonnement identique à précédemment.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$.

$$\begin{aligned} P \in F_0 &\iff P(0) = 0 \iff c = 0 \\ &\iff P = aX^2 + bX \\ &\iff P \in \text{vect}\left(X, X^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\left(X, X^2\right)$ est une famille génératrice de F_0. Étagée par les degrés, elle est, de plus, libre. Cest donc une base de F_0 ce qui assure que $\dim\left(F_0\right) = 2$.

2ème méthode : Un peu plus dans l'enchaînement des questions.

D'après la question 1, $F_0 \subset \text{vect}\left(\mathcal{B}\right)$.

Comme $(X-1)(X+1) \notin F_0$, on peut retirer ce vecteur pour obtenir

$$F_0 \subset \text{vect}\Big(X(X-1), X(X+1)\Big).$$

Il est aisé de vérifier que $X(X-1)$ et $X(X+1)$ s'annulent en 0 donc sont éléments de F_0 ce qui apporte l'inclusion réciproque.

Donc,

$$F_0 = \text{vect}\Big(X(X-1), X(X+1)\Big).$$

Commentaires: *On pouvait aussi montrer une inclusion puis conclure avec les dimensions et la question 2 (a).*

(d) D'après les questions précédentes, tout polynôme P de E se décompose de manière unique :

$$P = \underbrace{\alpha X(X-1) + \beta X(X+1)}_{\in F_0} + \underbrace{\gamma (X-1)(X+1)}_{\in H}.$$

Donc, $E = F_0 \oplus H$.

Commentaires: *Une autre manière est de montrer rapidement que $F_0 \cap H = \{0_E\}$ en considérant un polynôme de degré à 3 racines distinctes 0, 1 et −1 donc nul puis de conclure avec les dimensions car $F_0 + H \subset E$.*

Exercice 2 :

1
- $F \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- $A0_2 = 0_2 \implies 0_2 \in F$.
- Soient $(M_1, M_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Par linéarité à droite du produit matriciel, on a : $A\left(\lambda M_1 + \mu M_2\right) = \lambda AM_2 + \mu AM_2 = 0_2$ car $M_1 \in F$ et $M_2 \in F$.

  Par conséquent $\lambda M_1 + M_2 \in F$ qui est stable par combinaisons linéaires.

F est donc un sous-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. C'est, en particulier, un espace vectoriel.

2 Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in F &\iff AM_2 = 0_2 \iff \begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2c \\ b=-2d \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff M \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$.

Comme F est un sous-espace vectoriel, on en déduit

$$F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Commentaires: *Ce n'est pas fini ! Il reste à trouver la dimension de F en vérifiant que les deux matrices qui l'engendrent en forment bien une base.*

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ forme donc une famille génératrice de F. Vérifions qu'elle est libre.

Or, $\forall\, (\lambda\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \iff \iff \begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0_2 \iff \alpha = \beta = 0.$$

La famille est libre. C'est donc une base de F et $\dim(F) = 2$.

3 D'après la question précédente, la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

On peut donc la compléter en une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec des éléments d'une famille génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: par exemple la base canonique

$$\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Commentaires: *On ne peut pas compléter $\mathcal{F}$ n'importe comment. Il faut s'assurer que les éléments que l'on ajoute ne soient pas dans $\mathcal{F}$ et forment une famille libre avec les deux matrices engendrant F.*

— $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \text{vect}(\mathcal{F})$ car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies a = 1 \text{ et } a = 0$, ce qui est impossible. Voilà le premier vecteur à rajouter à $\mathcal{F}$!

— $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ car

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies a = -2,\ b = 1 \text{ et } b = 0$$

ce qui est impossible.

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc libre à 4 éléments dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4. Elle en forme donc une base.

— Il ne reste qu'à conclure. Par construction, $F = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

1 — $F \subset E$.

— La fonction nulle est clairement dans F.

— Soient $(f_1 ; f_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$.

La fonction $\lambda f_1 + f_2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda f_1 + f_2)' = \lambda f_1' + f_2'$.

Donc $(\lambda f_1 + f_2)'(0) = \lambda f_1'(0) + f_2'(0) = \lambda f_1'(1) + f_2'(1) = (\lambda f_1 + f_2)'(1)$ et $\lambda f_1 + f_2 \in F$.

— Sous-espace non vide de E stable par combinaisons linéaires, F en est un sous-espace vectoriel.

2 Posons $A = \operatorname{vect}(\arctan(x))$. Il est clair que tout élément de A est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car arctan l'est.

— Montrons tout d'abord que A et G sont en somme directe. Considérons pour cela $f = \lambda \arctan \in A$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f \in G \implies f'(0) = 0 \implies \left(\frac{\lambda}{1+x^2}\right)(0) = 0 \iff \lambda = 0_{\mathbb{R}} \iff f \equiv 0_E.$$

L'inclusion $\{0_E\} \subset A \cap G$ étant claire, on a $A \cap G = \{0_E\}$: la somme est directe.

— A et G étant des sev de E, on a déjà $A + G \subset E$. Montrons l'inclusion réciproque.

Pour cela considérons $f \in E$ et procédons par analyse-synthèse :

S'il existe un couple $(g ; a) \in G \times A$ tel que $f = g + a$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + \lambda \arctan(x).$$

Toutes les fonctions étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut dériver l'égalité précédente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g'(x) + \frac{\lambda}{1+x^2} \implies \begin{cases} f'(0) = g'(0) + \lambda \\ f'(1) = g'(1) + \dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} f'(0) = g'(0) + \lambda \\ f'(1) = g'(0) + \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$
$$\implies \lambda = 2\big(f'(0) - f'(1)\big).$$

La fonction a est déjà uniquement directement et la fonction $g = f - \lambda \arctan$ du même coup.

Réciproquement, il est clair que toute fonction f de E peut s'écrire sous la forme

$$f = \underbrace{f - 2\big(f'(0) - f'(1)\big)\arctan}_{g_1} + \underbrace{2\big(f'(0) - f'(1)\big)\arctan}_{a_1}.$$

Par la même limpidité, $a_1 \in A$ et g_1 de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifie

$$g'(0) = f'(0) - \frac{2\big(f'(0) - f'(1)\big)}{1+0^2} = f'(1) - f'(0) = f'(1) - \frac{2\big(f'(0) - f'(1)\big)}{1+1^2} = g'(1).$$

En particulier, $g_1 \in G$.

Ce qui achève de montrer que $E \subset G + A$, l'égalité puis la somme directe.

En conclusion :

$$F \oplus \operatorname{vect}(\arctan(x)) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} ; \mathbb{R}).$$