

Intégration

La fonction F est définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

On note Γ la courbe représentative de F .

- 1
- (a) Justifier que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
 - (b) Étudier le signe de F sur $]0, +\infty[$.
 - (c) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 , et même de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.
Calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

2 Établir que :

$$\forall x > 0, \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x).$$

- 3
- (a) On note ϕ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\phi(x) = \frac{\arctan x}{x}$.
Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.
 - (b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = (\arctan x) \ln x - \int_1^x \phi(t) dt.$$

- (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0 (on continuera de noter F le prolongement), puis la limite de F en $+\infty$.
- (d) Montrer que F n'est pas dérivable en 0.

Que peut-on néanmoins déduire pour Γ ?

4 Dans cette question, on cherche une valeur approchée de $F(0)$.

- (a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$.
- (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

- (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x).$$

- (d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Montrer que

$$|F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

- (e) Déduire de ce qui précède un entier n tel que u_n soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$. Expliciter la valeur approchée obtenue.

5 Tracer Γ , en tenant compte des informations démontrées dans l'énoncé.

On donne $F(0) \simeq 0,92$.