Intégration

1 (a) Comme $1+t^2 \neq 0$, la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue par morceaux (et même continue) sur $]0,+\infty[$, donc son intégrale sur $[x,1]$ (lorsque $x<1$) et sur $[1,x]$ (lorsque $x \geqslant 1$) est correctement définie, puisque le segment est inclus dans $]0,+\infty[$.

Commentaires:

— *Il n'y avait qu'une chose à dire, penser, écrire, méditer, prouver, comprendre : $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ continue sur $]0\,;+\infty[$. Que viennent faire les mots « définie », « classe $\mathscr{C}^1$ », « dérivable » ??? Arrêtez d'affirmer des choses juste parce que c'est marqué dans l'énoncé. Je lis vos copies vous savez ? Le résultat n'a aucune importance s'il est obtenu par intervention divine, magique, divagation, hallucination, méditation, pensée du moment, l'horoscope, que sais-je ? Seul le chemin, la réflexion et la preuve comptent.*

— *La bonne définition de f est une condition nécessaire au devoir pas à celle de la définition de sa primitive !*

— *Le sempiternel quotient de fonctions continues de dénominateur ne s'annulant pas !*

Au passage, il est mieux d'écrire « de dénominateur ne s'annulant pas » que « de dénominateur non nul ». Réfléchissez-y !

(b) Le signe de la fonction f est celui de ln.

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

— si $x \geqslant 1$, on intègre une fonction positive sur $[1,x]$ donc par positivité de l'intégrale, $F(x) \geqslant 0$.

— si $x<1$, f est négative sur $[x,1]$ donc $\displaystyle\int_x^1 f$ est négative. Donc $F(x) = \displaystyle\int_1^x f$ est positive : $F(x) \geqslant 0$.

Donc, $\forall\, x>0, \quad F(x) \geqslant 0$.

Commentaires:

— *En conclusion, de temps en temps, faut faire attention aux bornes !*

— *Quand vous avez des études de signe à faire pour des produits pensez à évacuer tout ce qui ne sert à rien avec la phrase « du signe de …» quitte à justifier vite fait puis concentrez-vous sur l'essentiel et ce qui pêche.*

(c) Soit $x>0$. La fonction f étant **continue** $]0,+\infty[$, elle l'est sur tout segment $[1\,;x]$ ou $[x\,;1]$.

D'après le *théorème fondamental*, sa primitive F sur ce même intervalle s'annulant en 1 y est au moins de classe $\mathscr{C}^1$.

La dérivabilité et la continuité étant des notions locales, F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x>0, \qquad F'(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ (comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas), sa primitive F est elle-même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Remarque : La dérivée s'annulant en changeant de signe pour $x=1$, on en déduit que F y admet un minimum (dérivée négative à positive) valant $F(1)=0$.

Commentaires: *Faites l'effort de différencier la valeur $\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$! Pour un correcteur, cela change tout sur le ressenti de votre maturité mathématique.*

2 Soit $x>0$. On a $\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Effectuons le changement de variable $u=\frac{1}{t}$, la fonction $t\longmapsto\frac{1}{t}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ entre 1 et $\frac{1}{x}$. On a $\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Ainsi, $\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{-\ln\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_{\frac{1}{1}}^{x}\frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{F}(x)$.

Donc,

$$\forall\, x>0,\quad \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{F}(x).$$

Commentaires:

— *C'est quand même dommage pour certains d'oublier les formes différentielles* $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}t$ *ou* $\mathrm{d}u$ *!*

— *Même si c'est expressément écrit dans le programme que l'on ne doit pas faire attention à la classe du changement de variables, pensez toujours à regarder deux choses : tout d'abord qu'il soit bien défini par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle concerné et ensuite qu'il soit bien croissant afin de ne pas faire d'erreurs de signe sur les bornes.*

3 (a) On a $\phi(x)=\frac{\arctan(x)}{x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{x}=1$.

D'où $\lim_{x\to 0}\phi(x)=1$. Cette limite étant finie, la fonction ϕ est bien prolongeable par continuité en 0, et on peut poser $\tilde{\phi}(0)=1$.

Continue sur $]0\,;+\infty[$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction ϕ (son prolongement) est continue sur $[0\,;+\infty[$ et sa primitive sera continue sur ce même intervalle.

Commentaires:

— *Limite existe et est finie en x_0 implique existence du prolongement !*

— *Terminé les limites de taux d'accroissement maintenant que l'on a les DL. Vous dites, juste mal quelque chose d'efficace que l'on a correctement justifié.*

— *Pour ceux qui ont voulu justifier l'existence du développement limité (c'est bien mais un peu excès de zèle) quelques remarques :*

  ◇ *Seule la classe de* arctan *en 0 nous intéresse car c'est la seule que l'on développe et pas ϕ.*

  ◇ *Si vous dites qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, par exemple, vous ne pouvez pas tomber un DL à l'ordre 3 après mais seulement 1. Si vous voulez plus, faut justifiez plus ! C'est la vie !*

(b) Soit $x>0$.

Les fonctions ln et arctan étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,x]$ (ou $[x,1]$ si $x<1$), on peut intégrer par parties : $\mathrm{F}(x)=\int_1^x\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln(t)\arctan(t)\Big]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Finalement,

$$\forall\, x>0,\quad \mathrm{F}(x)=(\arctan(x))\ln(x)-\int_1^x\phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) i. On a $(\arctan(x))\ln(x)\underset{x\to 0}{\sim}x\ln(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ (croissances comparées).

Donc $\lim_{x\to 0}(\arctan(x))\ln(x)=0$.

La fonction $x\longmapsto(\arctan(x))\ln(x)$ est prolongeable par continuité en 0 ;

Commentaires: *Les problèmes de limites sont des problèmes de recherche d'équivalent pas de développements limités.*

ii. $\forall\, x>0$, $\int_1^x\phi(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x\tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$, puisque $\tilde{\phi}$ et ϕ coïncident sur l'intervalle d'intégration ($x\neq 0$).

$\tilde{\phi}$ étant continue sur $[0,+\infty[$, la fonction $x\longmapsto\int_1^x\tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $\tilde{\phi}$ sur $[0,+\infty[$ (théorème fondamental). Elle est donc continue sur $[0,+\infty[$.

La fonction $x \longmapsto \int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$ coïncidant avec $x \longmapsto \int_1^x \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$ sur $]0,+\infty[$, elles ont la même limite en 0.

D'où $\lim_{x\to 0} \int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$.

Commentaires: *Le fait que ϕ soit prolongeable par continuité en 0 donc (son prolongement) continue sur $[0\,;+\infty[$ entraîne plus que la bonne définition de sa primitive mais sa classe $\mathscr{C}^1$. En particulier sa continuité et sa limite finie en 0.*

D'après la relation précédente, on peut en déduire que $\lim_{x\to 0} \mathrm{F}(x) = 0 + \int_1^0 \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$.

F est prolongeable par continuité en 0 et on note $\mathrm{F}(0) = \int_1^0 \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$.

Commentaires: *On n'a pas $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0}{=} x\ln(x) + \int_0^1 \phi(t)\,\mathrm{d}t + o\,(x)$ mais $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0}{=} \int_0^1 \phi(t)\,\mathrm{d}t + x\ln(x) + o\,(x\ln(x))$ et tout l'exercice tend à prouver que $\mathrm{F}(0) \neq 0$ afin de pouvoir écrire $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \int_0^1 \phi(t)\,\mathrm{d}t$.*

Remarquez que si on avait eu $\mathrm{F}(0) = 0$, il aurait alors fallu trouver un développement limité de $\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$ en 0 afin de pouvoir comparer avec $x\ln(x)$. Cela aurait été plus dur…ou pas à partir d'un développement de sa dérivé puis primitivation.

Par composition des limites et continuité de F en 0, $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0). \end{cases}$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{F}(0)$.

Or, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Enfin, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0)$.

La courbe Γ admet donc une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = \mathrm{F}(0)$.

Commentaires:

- *Comprenez bien l'importance de la continuité de F en 0 que l'on s'est embêté à montrer pas pour rien.*
- *La petite interprétation graphique sera toujours la bienvenue même si on ne vous la demande pas.*

d)
- F (= son prolongement) est continue en 0 ;
- F est dérivable sur $]0,+\infty[$;
- $\forall\, x > 0, \quad \mathrm{F}'(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on peut en déduire que F n'est pas dérivable en 0.

Cependant, Γ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

Commentaires:

- *Vous continuez à affirmer des choses fantaisistes et fausses dès que vous ne savez pas justifier. C'est très pénible et relève du syndrome de Peter Pan. M'écrire sans faiblir que « le produit de deux fonctions non dérivables n'est pas dérivable » est stupéfiant. Vous ne pouvez pas prendre deux secondes pour chercher un contre-exemple ou deux ? Si on prend la première et surement la seule fonction non dérivable que vous connaissez à savoir $x \longmapsto |x|$ qu'obtient-on ? La pauvre parabole, bien plate, bien jolie, bien gentille vient de perdre sa tangente en 0. Réfléchissez !*
- *Quand on connait la dérivée, il est plus facile de montrer que celle-ci n'a pas de limite finie en un point pour montrer que la fonction ne peut y être dérivable que d'utiliser le taux d'accroissement. On utilise ainsi la contraposée du théorème de la limite de la dérivée.*

4 (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Les fonctions $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle inclus dans $[1\,;+\infty[$ donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k(x) &= \int_1^x t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_1^x t^k\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{1}{k+1}\,\frac{x^{k+1}-1}{k+1}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x > 0, \quad \mathrm{I}_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} + \frac{1-x^{k+1}}{(k+1)^2}$$

Commentaires: *Il y a 36 façons d'obtenir des relations de récurrence entre intégrales donc, après l'avoir justifié, dites bien que vous faites une intégration par parties.*

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

D'après une formule très célèbre, $(1-(-x^2))\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = 1-(-x^2)^{n+1}$.

En divisant par $1+x^2 \neq 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

Et finalement,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Commentaires: *Pour la bonne continuité de vos études, il est très important de savoir reconnaître une série géométrique quand vous la voyez. Rappelez-vous que c'est à peu de choses près, les seuls séries que l'on maîtrise alors aimez les !*

En effet, pour $x \neq -1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x^2$ et de premier terme 1. On sait (vous avez intérêt !) alors que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Y a quoi de dur ? La $5^{\text{ème}}$ et les parenthèses ?

(c) On peut l'appliquer en $t > 0$ et multiplier par $\ln(t)$:

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\ln(t) + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}.$$

On intègre entre 1 et x et on utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_1^x t^{2k}\ln(t)\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît :

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{I}_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'où,

$$\left|\mathrm{F}(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{I}_{2k}(x)\right| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|.$$

i. Si $x \geqslant 1$, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t\in[1,x]}\left(\left|\frac{1}{1+t^2}\right|\right)\int_1^x t^{2n+2}|\ln(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x t^{2n+2}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{2n+2}.$$

ii. Si $0<x<1$, il faut travailler sur l'intervalle $[x,1]$:

$$\left|\int_x^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t\in[x,1]}\left(\left|\frac{1}{1+t^2}\right|\right)\int_x^1 t^{2n+2}|\ln(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x t^{2n+2}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{2n+2}.$$

le logarithme était négatif, mais les bornes étaient à l'envers, et on retombe bien sur I_{2n+2}.

Dans tous les cas, le sup sur l'intervalle a été majoré par le sup sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1.

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x>0,\quad \left|\mathrm{F}(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{I}_{2k}(x)\right| \leqslant \mathrm{I}_{2n+2}(x).$$

d) On pose $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

On ne peut pas remplacer x par 0 dans l'inégalité précédente, car elle n'est valable que pour $x>0$. Mais on peut faire tendre x vers 0, après avoir constaté que tous les termes avaient une limite, et utiliser le passage à la limite, et on obtient :

$$|\mathrm{F}(0)-u_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

e) u_n sera une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathrm{F}(0)$ dès que $\dfrac{1}{(2n+3)^2}\leqslant 10^{-2}$ (condition suffisante).

Or, $\dfrac{1}{(2n+3)^2}\leqslant 10^{-2} \iff (2n+3)^2\geqslant 10^2 \underset{\text{car } 2n+1\geqslant 0}{\iff} 2n+3\geqslant 10 \iff n\geqslant \dfrac{7}{2}$.

On en déduit que u_4 est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathrm{F}(0)$.

$\mathrm{F}(0)\simeq u_4 = 1-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}-\dfrac{1}{49}=0,92$, à 10^{-2} près.

Commentaires: *Inutile de recopier plus de décimales car elles ne signifieraient rien.*

5