Intégration

Une seule réponse exacte par question.

1 La suite $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\, \mathrm{d}x$ est

- a ☐ croissante
- b ☐ strictement croissante
- c ☐ décroissante
- d ☑ strictement décroissante

2 Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue. Alors $\mathrm{F}'(x)$ est égal à

- a ☑ $f(\sin^2 x)$
- b ☐ $2\cos x \sin x f(\sin^2 x)$
- c ☐ $2\cos x \sin x f'(\sin^2 x)$
- d ☐ $\displaystyle\int_0^x 2\cos t \sin t f'(\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$

3 Si on fait le changement de variable $u = at$ (avec $a > 0$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ on obtient

- a ☐ $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right) \,\mathrm{d}u$
- b ☐ $\displaystyle\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right) \,\mathrm{d}u$
- c ☐ $\displaystyle a\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right) \,\mathrm{d}u$
- d ☑ $\displaystyle \frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right) \,\mathrm{d}u$

4 En supposant les intégrales bien définies, que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$?

- a ☐ $\displaystyle\int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t$
- b ☐ $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$
- c ☑ $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
- d ☐ $\displaystyle\int_{-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$

5 La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est

- a ☐ $\dfrac{e^{2x}}{2x}$
- b ☐ $\dfrac{e^{2x}}{2x} - e$
- c ☐ $\dfrac{e^{2x}}{x} - 2e$
- d ☑ $\dfrac{e^{2x}}{x}$

6 En intégrant $\displaystyle\int_0^1 xe^x \,\, \mathrm{d}x$ par parties on trouve

- a ☐ 0
- b ☑ 1
- c ☐ e
- d ☐ $2e - 1$

7 Laquelle des conditions suivantes est suffisante pour dire que la fonction continue f est nulle sur $[0, 1]$?

- a ☐ $\displaystyle\int_0^1 f = 0$
- b ☑ $\displaystyle\int_0^1 f^2 = 0$
- c ☐ $\displaystyle\int_0^1 f \circ f = 0$
- d ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f = \int_{\frac{1}{2}}^1 f$

8 Le changement de variable $u = \sin t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$ donne

- a ☑ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} \,\mathrm{d}u$
- b ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(u) \,\mathrm{d}u$
- c ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(u) \,\mathrm{d}u$
- d ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} \,\mathrm{d}u$

9 La suite $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \cos\frac{k\pi}{n}$ converge vers

- a ☐ $\int_0^1 x^2 \cos x \ \mathrm{d}x$
- b ☑ $\int_0^1 x^2 \cos(\pi x) \ \mathrm{d}x$
- c ☐ $\int_0^\pi x^2 \cos x \ \mathrm{d}x$
- d ☐ $\int_0^1 x^3 \cos(\pi x) \ \mathrm{d}x$

10 Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continue. Que vaut $\int_0^1 f - \int_0^2 f$?

- a ☑ $-\int_1^2 f$
- b ☐ $-\int_2^1 f$
- c ☐ $-\int_0^1 f$
- d ☐ $\int_1^2 f$

11 Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, f vérifiant de plus les conditions au bord : $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. En intégrant deux fois par parties, $\int_0^1 fg''$ est égale à

- a ☐ $\int_0^1 f'g$
- b ☑ $\int_0^1 f''g$
- c ☐ $-\int_0^1 f''g$
- d ☐ $-\int_0^1 f'g$

12 Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit $f(1) = f(0)+f'(0)+\mathrm{R}$ où R vaut

- a ☐ $\int_0^1 \frac{f''(t)t^2}{2!}\,\mathrm{d}t$
- b ☐ $\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)^2}{2!}\,\mathrm{d}t$
- c ☑ $\int_0^1 f''(t)(1-t)\,\mathrm{d}t$
- d ☐ $\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)}{2!}\,\mathrm{d}t$

13 La suite $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}$ tend vers

- a ☑ 0
- b ☐ $\int_0^1 \sqrt{x} \ \mathrm{d}x$
- c ☐ $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$
- d ☐ $+\infty$

14 Si dans l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ on effectue le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$, on obtient :

- a ☑ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \ \mathrm{d}u$
- b ☐ $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \ \mathrm{d}u$
- c ☐ $(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \ \mathrm{d}u$
- d ☐ $(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \ \mathrm{d}u$

15 Si n est un entier naturel, alors $\int_0^n ex \ \mathrm{d}x$ vaut

- a ☐ n
- b ☐ $\mathrm{e}\frac{n^2}{2}$
- c ☑ $\frac{n(n-1)}{2}$
- d ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$

16 Soient $a \leqslant b$ deux réels tels que $\int_a^b \sin t\,\mathrm{d}t = b - a$. Alors forcément

- a ☐ $\sin t = 1$
- b ☐ $b = a + 2k\pi$
- c ☑ $b = a$
- d ☐ $\cos b = \cos a$

17 Lorsque $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, laquelle des intégrales suivantes est strictement positive ?

ⓐ ☐ $\int_0^1 |f|$ ⓑ ☑ $\int_0^1 (f^2 - f + 1)$ ⓒ ☐ $\int_0^1 (f + |f|)$ ⓓ ☐ $\int_0^1 \sin \circ f$

18 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f = 0$. Alors f

ⓐ ☐ est nulle
ⓑ ☐ s'annule exactement une fois sur $]0,1[$
ⓒ ☑ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$
ⓓ ☐ ne s'annule pas forcément

19 Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{\sin x} f(t^2)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x)$ est égal à

ⓐ ☑ $\cos(x) f(\sin^2 x)$
ⓑ ☐ $\int_0^{\cos x} f(t^2)\,\mathrm{d}t$
ⓒ ☐ $\int_0^{\sin x} 2t f'(t^2)\,\mathrm{d}t$
ⓓ ☐ $\cos(x) f'(\sin^2 x)$

20 Soit $a > 0$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle continue telle que $|f| \leqslant \mathrm{M}$, alors l'intégrale $\int_0^a f(t) \cos t\,\mathrm{d}t$ est comprise entre

ⓐ ☐ $-\mathrm{M}$ et M
ⓑ ☑ $-a\mathrm{M}$ et $a\mathrm{M}$
ⓒ ☐ $-\mathrm{M}\sin a$ et $\mathrm{M}\sin a$
ⓓ ☐ $\mathrm{M}\cos 0$ et $\mathrm{M}\cos a$

21 Laquelle des intégrales suivantes est égale à $\int_0^1 e^{-t} t^2\,\mathrm{d}t$?

ⓐ ☐ $\int_1^e \frac{\ln u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ ⓑ ☑ $\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$ ⓒ ☐ $\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u}\,\mathrm{d}u$ ⓓ ☐ $\int_1^e (\ln u)^2\,\mathrm{d}u$

22 La fonction $\mathrm{F} : \lambda \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\lambda + \sin x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$,

ⓐ ☐ est croissante et tend vers 0 en $+\infty$
ⓑ ☑ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$
ⓒ ☐ est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$
ⓓ ☐ est décroissante et tend vers $-\infty$ en $+\infty$