

Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

I EN DIMENSION QUELCONQUE

1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Quelle propriété est toujours vérifiée ?

a $\square \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$

c $\square \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} u^2 = \{0\}$

b $\square \operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} u^2$

d $\square \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2 = E$

2 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E ,

a $\square u(x) = 0 \implies v(x) = 0$

c $\square u(x) = 0$ et $v(x) = 0$

b $\square v(x) = 0 \implies u(x) = 0$

d $\square u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3 Soit F un sous-espace vectoriel de E , u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F .

a $\square v \in \mathcal{L}(F)$

c $\square v \in \mathcal{L}(E, F)$

b $\square v \in \mathcal{L}(F, E)$

d $\square v$ n'est pas forcément linéaire

4 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

a \square si $\ker u = F$

c \square si $F \cap \ker u = \{0\}$

b \square si $F \not\subset \ker u$

d \square si $F \cap \ker u = \emptyset$

5 Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas linéaire ?

a $\square f \mapsto g \circ f$

c $\square f \mapsto f + g$

b $\square f \mapsto f \circ g$

d $\square f \mapsto g \circ f \circ g$

6 Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :

a $\square \lambda x^n$

c $\square \lambda x$

b $\square \lambda^n x$

d $\square \lambda^n x^n$

7 Si u est un endomorphisme de E , on a toujours

a $\square \ker u \subset \ker u^2$

c $\square \ker u = \ker u^2$

b $\square \ker u \supset \ker u^2$

d $\square \ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

8 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

- a $\text{Im } u = \text{Im } v$ c $\text{Im } v \subset \ker u$
 b $u = \text{Id}$ d $u|_{\text{Im } v} = \text{Id}$

9 Laquelle des applications suivantes est un projecteur de \mathbb{R}^2 ?

- a $(x, y) \mapsto (y, x)$ c $(x, y) \mapsto (0, x)$
 b $(x, y) \mapsto (1, 0)$ d $(x, y) \mapsto (0, y)$

10 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = \text{Id}$, que vaut $(u^2 + u)^2$?

- a 2Id c $2\text{Id} + 2u$
 b $2u$ d $\text{Id} + u^2$

11 Lequel des ensembles suivants de $\mathcal{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

- a l'ensemble des projecteurs
 b l'ensemble des symétries
 c l'ensemble des endomorphismes non nuls
 d l'ensemble des homothéties

II EN DIMENSION FINIE

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1 Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

- a $\dim E$ c $\text{rg } u$
 b $\text{rg } v$ d $\text{rg } u + \text{rg } v + \text{rg } v^{-1}$

2 Soit u un endomorphisme de E de rang r . Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

- a r^2 b $2r$ c r d $r - 2$

3 Si E est de dimension n , la dimension de $\mathcal{L}(E)$ est

- a n^2 b n c 2^n d $2n$

4 Soit (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Combien y a-t-il d'endomorphismes de \mathbb{R}^2 qui échangent e_1 et e_2 ?

- a aucun b 1 c 2 d une infinité

5 Soient f, g deux endomorphismes de E . Laquelle des conditions suivantes implique que $\text{rg } f = \text{rg } g$?

- a $f^2 = g^2$ c $\ker f = \ker g$
 b $f \circ g = g \circ f$ d $\text{rg}(f + \text{Id}_E) = \text{rg}(g + \text{Id}_E)$

6 Soit f une forme linéaire sur E et u dans $\mathcal{L}(E)$.

Laquelle des applications suivantes est aussi une forme linéaire sur E ?

- a $\square f \circ u$
 b $\square u \circ f$
 c $\square f \circ f$
 d $\square f \times f$

7 Soit A une famille de vecteurs de E . A quelle condition peut-on trouver un endomorphisme de E qui s'annule en tout vecteur de A mais qui n'est pas identiquement nul ?

- a \square si A est libre
 c \square si A n'est pas libre
 b \square si A est génératrice
 d \square si A n'est pas génératrice

8 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $\text{Im } u = \text{Im } v$, que peut-on en déduire ?

- a $\square u = v$
 c $\square \text{rg } u = \text{rg } v$
 b $\square \ker u = \ker v$
 d $\square u$ et v sont surjectives

9 Soit ϕ une forme linéaire non nulle de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Alors ϕ est nécessairement

- a \square injective
 c \square constante
 b \square surjective
 d \square un projecteur

10 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$. Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

- a \square si u est injectif, alors u est bijectif.
 b \square s'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = \text{Id}_E$, alors u est bijectif
 c \square si $u + \text{Id}_E$ est bijectif, alors u est bijectif
 d \square si u^2 est bijectif, alors u est bijectif

11 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $u = 0$?

- a $\square u^2 = 0$
 c $\square v \circ u = 0$ et $\text{Im } v = E$
 b $\square u \circ v = 0$ et $v \neq 0$
 d $\square u \circ v = v \circ u$

12 Si E est de dimension n , l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ est de dimension

- a $\square 2n^2$
 b $\square n^4$
 c $\square 2^{2n}$
 d $\square 4^n$

13 Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) = F$. Alors

- a $\square \text{Im } u = F$
 b \square la restriction de u à F est l'identité
 c \square la restriction de u à F est un automorphisme de F
 d $\square F \subset \ker(u - \text{Id}_E)$

14 Soient f, g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f = 0$. Alors

- a $\square f = 0$ ou $g = 0$
 c $\square \text{rg } g \leq \text{rg } f$
 b $\square \text{rg } f \leq \text{rg } g$
 d $\square \text{rg } g + \text{rg } f \leq n$

15 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à 4

tels que $\int_0^1 P = 0$?

a $\square 0$ b $\square 1$ c $\square 3$ d $\square 4$

16 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } u$. Alors

 a $\square v$ est bijectif c $\square \ker v \cap \text{Im } u = \{0\}$ b $\square v$ est nul d $\square \text{Im } v \cap \text{Im } u = \{0\}$

17 Soit u un endomorphisme de E et v la restriction de u à $\text{Im } u$. A quelle condition v est-il un isomorphisme de $\text{Im } u$ sur lui-même ?

 a \square c'est toujours le cas b \square lorsque $\text{Im } u$ et $\ker u$ sont supplémentaires c \square lorsque $\ker u = \text{Im } u$ d \square lorsque u n'est pas nul

18 Soient e_1, \dots, e_p des vecteurs de E . On suppose que u est un endomorphisme de E qui vérifie $u(e_1) = e_2, u(e_2) = e_3, \dots, u(e_{p-1}) = e_p$ et $u(e_p) = e_1$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que u est bijectif ?

 a $\square p \geq \dim E$ c $\square (e_1, \dots, e_p)$ est libre b $\square p = \dim E$ d $\square (e_1, \dots, e_p)$ est génératrice

19 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $P(0) = P(1)$?

 a $\square n$ b $\square n - 1$ c $\square n/2$ d $\square 1$