Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

I En dimension quelconque

1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

a ☐ $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$
b ☑ $\text{Im } u \supset \text{Im } u^2$
c ☐ $\text{Im } u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$
d ☐ $\text{Im } u + \text{Im } u^2 = \mathrm{E}$

2 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E,

a ☑ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$
b ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$
c ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
d ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3 Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F.

a ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$
b ☑ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$
c ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$
d ☐ v n'est pas forcément linéaire

4 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace vectoriel de E. A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

a ☐ si $\ker u = \mathrm{F}$
b ☐ si $\mathrm{F} \not\subset \ker u$
c ☑ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \{0\}$
d ☐ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \varnothing$

5 Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas linéaire ?

a ☐ $f \mapsto g \circ f$
b ☐ $f \mapsto f \circ g$
c ☑ $f \mapsto f + g$
d ☐ $f \mapsto g \circ f \circ g$

6 Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :

a ☐ λx^n
b ☑ $\lambda^n x$
c ☐ λx
d ☐ $\lambda^n x^n$

7 Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

a ☑ $\ker u \subset \ker u^2$
b ☐ $\ker u \supset \ker u^2$
c ☐ $\ker u = \ker u^2$
d ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

8 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

(a) ☐ Im u = Im v
(b) ☐ $u = \mathrm{Id}$
(c) ☐ Im $v \subset \ker u$
(d) ☑ $u|_{\mathrm{Im}\ v} = \mathrm{Id}$

9 Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

(a) ☐ $(x,y) \mapsto (y,x)$
(b) ☐ $(x,y) \mapsto (1,0)$
(c) ☐ $(x,y) \mapsto (0,x)$
(d) ☑ $(x,y) \mapsto (0,y)$

10 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $u^2 = \mathrm{I}d$, que vaut $(u^2+u)^2$?

(a) ☐ $2\mathrm{I}d$
(b) ☐ $2u$
(c) ☑ $2\mathrm{I}d + 2u$
(d) ☐ $\mathrm{I}d + u^2$

11 Lequel des ensembles suivants de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

(a) ☐ l'ensemble des projecteurs
(b) ☐ l'ensemble des symétries
(c) ☑ l'ensemble des endomorphismes non nuls
(d) ☐ l'ensemble des homothéties

II En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1 Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $u \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

(a) ☐ dim E
(b) ☑ rg v
(c) ☐ rg u
(d) ☐ rg u + rg v + rg v^{-1}

2 Soit u un endomorphisme de E de rang r. Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

(a) ☐ r^2
(b) ☐ $2r$
(c) ☑ r
(d) ☐ $r-2$

3 Si E est de dimension n, la dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est

(a) ☑ n^2
(b) ☐ n
(c) ☐ 2^n
(d) ☐ $2n$

4 Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Combien y a-t-il d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui échangent e_1 et e_2 ?

(a) ☐ aucun
(b) ☑ 1
(c) ☐ 2
(d) ☐ une infinité

5 Soient f, g deux endomorphismes de E. Laquelle des conditions suivantes implique que rg f = rg g ?

(a) ☐ $f^2 = g^2$
(b) ☐ $f \circ g = g \circ f$
(c) ☑ $\ker f = \ker g$
(d) ☐ rg $(f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ = rg $(g + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$

6 Soit f une forme linéaire sur E et u dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Laquelle des applications suivantes est aussi une forme linéaire sur E ?

(a) ☑ $f \circ u$ (b) ☐ $u \circ f$ (c) ☐ $f \circ f$ (d) ☐ $f \times f$

7 Soit A une famille de vecteurs de E. A quelle condition peut-on trouver un endomorphisme de E qui s'annule en tout vecteur de A mais qui n'est pas identiquement nul ?

(a) ☐ si A est libre
(b) ☐ si A est génératrice
(c) ☐ si A n'est pas libre
(d) ☑ si A n'est pas génératrice

8 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ v$, que peut-on en déduire ?

(a) ☐ $u = v$
(b) ☐ $\ker u = \ker v$
(c) ☑ $\mathrm{rg}\ u = \mathrm{rg}\ v$
(d) ☐ u et v sont surjectives

9 Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement

(a) ☐ injective
(b) ☑ surjective
(c) ☐ constante
(d) ☐ un projecteur

10 Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

(a) ☐ si u est injectif, alors u est bijectif.
(b) ☐ s'il existe $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, alors u est bijectif
(c) ☐ si $u + \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est bijectif, alors u est bijectif
(d) ☐ si u^2 est bijectif, alors u est bijectif

11 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $u = 0$?

(a) ☐ $u^2 = 0$
(b) ☐ $u \circ v = 0$ et $v \neq 0$
(c) ☑ $v \circ u = 0$ et $\mathrm{Im}\ v = \mathrm{E}$
(d) ☐ $u \circ v = v \circ u$

12 Si E est de dimension n, l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$ est de dimension

(a) ☐ $2n^2$ (b) ☑ n^4 (c) ☐ 2^{2^n} (d) ☐ 4^n

13 Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. Alors

(a) ☐ $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{F}$
(b) ☐ la restriction de u à F est l'identité
(c) ☑ la restriction de u à F est un automorphisme de F
(d) ☐ $\mathrm{F} \subset \ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$

14 Soient f, g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f = 0$. Alors

(a) ☐ $f = 0$ ou $g = 0$
(b) ☐ $\mathrm{rg}\ f \leqslant \mathrm{rg}\ g$
(c) ☐ $\mathrm{rg}\ g \leqslant \mathrm{rg}\ f$
(d) ☑ $\mathrm{rg}\ g + \mathrm{rg}\ f \leqslant n$

15 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à 4 tels que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P} = 0$?

ⓐ ☐ 0 ⓑ ☐ 1 ⓒ ☐ 3 ⓓ ☑ 4

16 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors

ⓐ ☐ v est bijectif
ⓑ ☐ v est nul
ⓒ ☑ $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$
ⓓ ☐ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

17 Soit u un endomorphisme de E et v la restriction de u à $\operatorname{Im} u$. A quelle condition v est-il un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur lui-même ?

ⓐ ☐ c'est toujours le cas
ⓑ ☑ lorsque $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont supplémentaires
ⓒ ☐ lorsque $\ker u = \operatorname{Im} u$
ⓓ ☐ lorsque u n'est pas nul

18 Soient $e_1, \ldots, e_p$ des vecteurs de E. On suppose que u est un endomorphisme de E qui vérifie $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, ..., $u(e_{p-1}) = e_p$ et $u(e_p) = e_1$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que u est bijectif ?

ⓐ ☐ $p \geqslant \dim \mathrm{E}$
ⓑ ☐ $p = \dim \mathrm{E}$
ⓒ ☐ $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre
ⓓ ☑ $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice

19 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$?

ⓐ ☑ n ⓑ ☐ $n-1$ ⓒ ☐ $n/2$ ⓓ ☐ 1