Applications linéaires

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\varphi(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P + (1 - X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\text{Vect}(X - 1) \subset \ker \varphi$.
3. Dans cette question, on suppose que P appartient à $\ker \varphi$ et est non nul.
   (a) Montrer que $X - 1$ divise P.
   (b) En considérant le coefficient dominant de $\varphi(P)$, montrer que P est un polynôme de degré 1.
   (c) Déterminer $\ker \varphi$.
4. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note T_k le polynôme $(X - 1)^k$.
   (a) Exprimer $\varphi(T_k)$ en fonction de k et T_k.
   (b) En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que
   $$\text{Im } \varphi = \text{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, ..., n\}\right).$$
5. Montrer que $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour un réel k non nul, on définit

$$A_k = \left\{u \in \mathcal{L}(E),\ u^2 = u \circ u = k \cdot u\right\}.$$

Dans tout ce problème, u et v désignent deux éléments de A_k.

1. (a) Montrer que l'endomorphisme $k\text{Id}_E$ appartient à A_k.
   (b) Montrer que u est un automorphisme si et seulement si $u = k\text{Id}_E$.
   (c) Justifier rapidement que $\text{Im}\,(u)$ et $\ker\,(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E et montrer qu'ils sont supplémentaires.
2. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Montrer que $u \circ v \in A_{k^2}$.
   (b) Montrer que $\text{Im}\,(u \circ v) = \text{Im}\,(u) \cap \text{Im}\,(v)$.
   (c) Montrer que $\ker\,(u \circ v) = \ker\,(u) + \ker\,(v)$.
3. On suppose $u \circ v = v \circ u = 0$.
   (a) Montrer que $u + v \in A_k$.
   (b) Montrer que $\text{Im}\,(u + v) = \text{Im}\,(u) + \text{Im}\,(v)$.
   (c) Montrer que $\ker\,(u + v) = \ker\,(u) \cap \ker\,(v)$.