Applications linéaires

Exercice 1 :

1. (a) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ donc $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n$. On a $\deg(\mathrm{P}') \leqslant \deg(\mathrm{P}) - 1$ donc

$$\deg((1-\mathrm{X})\mathrm{P}') = \deg(1-\mathrm{X}) + \deg(\mathrm{P}') \leqslant 1 + \deg(\mathrm{P}) - 1 \leqslant n.$$

Il s'ensuit

$$\deg(\mathrm{P} + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}') \leqslant \max\{\deg(\mathrm{P}), \deg((1-\mathrm{X})\mathrm{P}')\} \leqslant n, \quad \textit{ie}\ \mathrm{P} + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}' \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].$$

(b) Grâce à la question précédente, on sait que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On montre que φ est linéaire.
Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) &= (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) + (1-\mathrm{X})(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})' = \lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q} + (1-\mathrm{X})(\lambda\mathrm{P}' + \mu\mathrm{Q}') \\ &= \lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q} + \lambda(1-\mathrm{X})\mathrm{P}' + \mu(1-\mathrm{X})\mathrm{Q}' \\ &= \lambda(\mathrm{P} + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}') + \mu(\mathrm{Q} + (1-\mathrm{X})\mathrm{Q}') = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \mu\varphi(\mathrm{Q}).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\varphi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ linéaire, autrement dit, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{X}-1)$. Il existe un réel λ tel que $\mathrm{P} = \lambda(\mathrm{X}-1)$. Dès lors, on a

$$\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}' = \lambda(\mathrm{X}-1) + (1-\mathrm{X})\lambda = 0 \quad \text{donc} \quad \mathrm{P} \in \ker\varphi.$$

Par conséquent, on a $\mathrm{Vect}(\mathrm{X}-1) \subset \ker\varphi$.

3. (a) On a $\mathrm{P} \in \ker\varphi$ donc $\varphi(\mathrm{P}) = 0$, autrement dit

$$\mathrm{P} + (1-\mathrm{X})\mathrm{P}' = 0 \iff \mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'.$$

Par conséquent, on a bien $\mathrm{X}-1$ qui divise P.

(b) Méthode 1 : On a $\mathrm{P} \neq 0$ donc, en notant $p \leqslant n$ le degré de P, il existe $p+1$ réels a_0, a_1,...,a_p avec $a_p \neq 0$ tels que

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}) &= \sum_{k=0}^{p} a_k\mathrm{X}^k + (1-\mathrm{X})\sum_{k=1}^{p} k a_k \mathrm{X}^{k-1} = \sum_{k=0}^{p} a_k\mathrm{X}^k + \sum_{k=1}^{p} k a_k\mathrm{X}^{k-1} - \sum_{k=0}^{p} k a_k \mathrm{X}^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k(1-k)\mathrm{X}^k + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)a_{k+1}\mathrm{X}^k \\ &= a_p(1-p)\mathrm{X}^p + \sum_{k=0}^{p-1}\left[a_k(1-k) + (k+1)a_{k+1}\right]\mathrm{X}^k.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que le coefficient dominant de $\varphi(\mathrm{P})$ est $a_p(1-p)$. Or, étant donné que $\mathrm{P} \in \ker\varphi$, le polynôme $\varphi(\mathrm{P})$ est nul donc en particulier, on a

$$a_p(1-p) = 0 \iff p = 1 \quad \text{car} \quad a_p \neq 0.$$

On a ainsi établi que P est de degré 1.
Méthode 2 : On a $P \in \ker\varphi$ donc $\varphi(P) = 0$ de quoi l'on tire $P = (X-1)P'$. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(P) = \varphi((X-1)P') &= (X-1)P' + (1-X)((X-1)P')' \\ &= (X-1)P' + (1-X)P' - (1-X)^2P'' = -(1-X)^2P''. \end{aligned}$$

On a $(1-X)^2 \neq 0$ donc $P'' = 0$. On en déduit que P' est constant donc $P = (X-1)P'$ est de degré 1 (P non nul donc P' non nul).
Remarque : On vient de prouver $P \in \mathrm{Vect}(X-1)$ donc $\ker\varphi \subset \mathrm{Vect}(X-1)$ que l'on reprouvera dans la question suivante.

c) On a déjà vu, lors de la question 2, que $\mathrm{Vect}(X-1) \subset \ker\varphi$. On montre désormais que $\ker\varphi \subset \mathrm{Vect}(X-1)$. Soit $P \in \ker\varphi$.
D'après la question 3*a*, on sait que $X-1$ divise P donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)Q$.
D'après la question 3*b*, on sait que $\deg(P) = 1$ donc $\deg(Q) = 0$, autrement dit, $Q \in \mathbb{R}$.
Il s'ensuit $P \in \mathrm{Vect}(X-1)$.
Par double inclusion, on obtient $\ker\varphi = \mathrm{Vect}(X-1)$.

4. Pour tout entier , on note T_k le polynôme $(X-1)^k$.

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a

$$\varphi(T_k) = T_k + (1-X)T_k' = (X-1)^k + k(1-X)(X-1)^{k-1} = (1-k)(X-1)^k = (1-k)T_k.$$

On retrouve le fait que $\varphi(T_1) = 0$, ie $\mathrm{Vect}(X-1) \subset \ker\varphi$.

b) • On montre que $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, ..., n\}\right)$.
Soit $Q \in \mathrm{Im}\,\varphi$. Il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \varphi(P)$. Grâce à la formule de Taylor, on peut écrire

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}T_k.$$

Par linéarité de φ, on peut écrire

$$\begin{aligned} Q = \varphi(P) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}T_k\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\varphi(T_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(1-k)T_k \quad \text{grâce à la question 4a,} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} \frac{(1-k)P^{(k)}(1)}{k!}T_k \quad \text{car } T_1 \in \ker\varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $Q \in \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, ..., n\}\right)$.
• On montre $\mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, ..., n\}\right) \subset \mathrm{Im}\,\varphi$.
Soit $Q \in \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, ..., n\}\right)$. Il existe $(a_0, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Q = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} a_k T_k.$$

Pour $k \neq 1$, grâce à la question 4*a*, on peut réécrire $T_k = \dfrac{1}{1-k}\varphi(T_k) = \varphi\left(\dfrac{1}{1-k}T_k\right)$.

Il s'ensuit

$$Q = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} a_k T_k = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} a_k \varphi\left(\frac{1}{1-k}T_k\right) = \varphi\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} \frac{a_k}{k-1}T_k\right) \in \mathrm{Im}\,\varphi.$$

• Par double inclusion, on a bien $\text{Im}\ \varphi = \text{Vect}\,(\text{T}_k, k \in \{0, 2, ..., n\})$.

5 • On a $\ker \varphi$ et $\text{Im}\ \varphi$ qui sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[\text{X}]$ en tant que noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\text{X}]$.
• On montre que $\mathbb{R}_n[\text{X}] = \ker(\varphi) + \text{Im}\ \varphi$ par double inclusion.
On a $\ker \varphi \subset \mathbb{R}_n[\text{X}]$ et $\text{Im}\ \varphi \subset \mathbb{R}_n[\text{X}]$ donc $\ker(\varphi) + \text{Im}\ \varphi \subset \mathbb{R}_n[\text{X}]$.
Soit $\text{P} \in \mathbb{R}_n[\text{X}]$. Grâce à la formule de Taylor, on peut réécrire

$$\text{P} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\text{P}^{(k)}(1)}{k!}(\text{X}-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\text{P}^{(k)}(1)}{k!}\text{T}_k = \underbrace{\text{P}'(1)(\text{X}-1)}_{\in\text{Vect}(\text{X}-1)} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{n} \frac{\text{P}^{(k)}(1)}{k!}\text{T}_k}_{\in\text{Vect}(\text{T}_k, k\in\{0,2,...,n\})}.$$

Étant données les expressions de $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}\ \varphi$ obtenues lors des questions $3c$ et $4b$, on a alors $\text{P} \in \ker(\varphi) + \text{Im}\ \varphi$. Par conséquent, on a $\mathbb{R}_n[\text{X}] \subset \ker(\varphi) + \text{Im}\ \varphi$.
• On montre que $\ker \varphi \cap \text{Im}\ \varphi = \{0\}$ par double inclusion.
On a toujours $0 \in \ker \varphi$ et $0 \in \text{Im}\ \varphi$ donc $\{0\} \subset \ker \varphi \cap \text{Im}\ \varphi$.
Soit $\text{P} \in \ker \varphi \cap \text{Im}\ \varphi$. On a $\text{P} \in \ker \varphi = \text{Vect}(\text{X}-1)$ donc il existe un réel λ tel que $\text{P} = \lambda(\text{X}-1)$. De plus, on a $\text{P} \in \text{Im}\ \varphi = \text{Vect}\,(\text{T}_k, k \in \{0, 2, ..., n\})$ donc il existe n réels a_0, a_2,...,a_n tels que $\text{P} = a_0 + \sum_{k=2}^{n} a_k(\text{X}-1)^k$. On a ainsi

$$\lambda(\text{X}-1) = a_0 + \sum_{k=2}^{n} a_k(\text{X}-1)^k.$$

En considérant les polynômes dérivés, il vient $\lambda = \sum_{k=2}^{n} k a_k (\text{X}-1)^{k-1}$. En spécifiant cette relation en $\text{X} = 1$, il vient $\lambda = 0$ donc $\text{P} = \lambda(\text{X}-1) = 0$.
On a ainsi établi $\ker \varphi \cap \text{Im}\ \varphi \subset \{0\}$.
• Par conséquent, on a $\ker \varphi$ et $\text{Im}\ \varphi$ qui sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_n[\text{X}]$, ce que l'on note $\mathbb{R}_n[\text{X}] = \ker \varphi \oplus \text{Im}\ \varphi$.

Exercice 2 :

1 a On a $(k\text{Id}_\text{E}) \circ (k\text{Id}_\text{E}) = k^2\text{Id}_\text{E} = k \cdot (k\text{Id}_\text{E})$ donc $k\text{Id}_\text{E}$ appartient à A_k.

b ($\Leftarrow$) Si $u = k\text{Id}_\text{E}$, en posant $v = \frac{1}{k}\text{Id}_\text{E}$ (k est supposé non nul), on a

$$u \circ v = (k\text{Id}_\text{E}) \circ \left(\frac{1}{k}\text{Id}_\text{E}\right) = k \times \frac{1}{k}\text{Id}_\text{E} = \text{Id}_\text{E}$$

On montre de la même manière $v \circ u = \text{Id}_\text{E}$. Par conséquent, la fonction u est bijective. Comme $u = k\text{Id}_\text{E}$ est un endomorphisme de E, on déduit que $u = k\text{Id}_\text{E}$ est un automorphisme de E.

($\Rightarrow$) Si u est un automorphisme de A_k. Il existe un automorphisme v de E tel que $u \circ v = v \circ u = \text{Id}_\text{E}$. Comme $u \circ u = ku$, on obtient

$$u = u \circ \text{Id}_\text{E} = u \circ (u \circ v) = (u \circ u) \circ v = (k \cdot u) \circ v = k \cdot (u \circ v) = k\text{Id}_\text{E}.$$

Par conséquent, u est un automorphisme si et seulement si $u = k\text{Id}_\text{E}$.

c Les ensembles $\text{Im}\,(u)$ et $\ker(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E en tant qu'image et noyau d'une application linéaire.

On montre $\text{Im}\,(u) \cap \ker(u) = \{0\}$. Soit $y \in \text{Im}\,(u) \cap \ker(u)$. On a $y \in \text{Im}\,(u)$ donc il existe $x \in \text{E}$ tel que $y = u(x)$. De plus, $y \in \ker(u)$ donc $u(y) = 0$. Dès lors, comme $u \in \text{A}_k$, on a

$$ky = ku(x) = u \circ u(x) = u(u(x)) = u(y) = 0.$$

Comme k est non nul, il vient $y = 0$. On en déduit $\mathrm{Im}\,(u) \cap \ker\,(u) \subset \{0\}$. L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Im}\,(u) \cap \ker\,(u)$ étant toujours vraie, on obtient par double inclusion

$$\mathrm{Im}\,(u) \cap \ker\,(u) = \{0\}.$$

On montre $\mathrm{Im}\,(u) + \ker\,(u) = \mathrm{E}$. Soit $x \in \mathrm{E}$.

Analyse : Supposons qu'il existe $y \in \mathrm{Im}\,(u)$ et $a \in \ker\,(u)$ tels que $x = y + a$. On a $y \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc il existe $b \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(b)$. Ainsi, $x = u(b) + a$ et $u(x) = u \circ u(b) + u(a) = ku(b) + 0 = ky$ car $a \in \ker\,(u)$ et $u \in \mathrm{A}_k$. Par conséquent, $y = \dfrac{1}{k}u(x)$ et $a = x - y = x - \dfrac{1}{k}u(x)$.

Synthèse : On pose $y = \dfrac{1}{k}u(x)$ et $a = x - \dfrac{1}{k}u(x)$. On a

(i) $y + a = \dfrac{1}{k}u(x) + x - \dfrac{1}{k}u(x) = x$,

(ii) $u(a) = u\left(x - \dfrac{1}{k}u(x)\right) = u(x) - \dfrac{1}{k}u \circ u(x) = u(x) - \dfrac{1}{k} \times ku(x) = 0$ donc $a \in \ker\,(u)$,

(iii) $y = \dfrac{1}{k}u(x) = u\left(\dfrac{1}{k}x\right) \in \mathrm{Im}\,(u)$.

Par conséquent, $x \in \mathrm{Im}\,(u) + \ker\,(u)$. On en déduit $\mathrm{E} \subset \mathrm{Im}\,(u) + \ker\,(u)$. L'inclusion $\mathrm{Im}\,(u) + \ker\,(u) \subset \mathrm{E}$ étant toujours vraie, on obtient par double inclusion

$$\mathrm{Im}\,(u) + \ker\,(u) = \mathrm{E}.$$

Il s'ensuit que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\ker\,(u)$ sont supplémentaires dans E.

2 a On a

$$\begin{aligned}(u \circ v) \circ (u \circ v) &= u \circ (v \circ u) \circ v = u \circ (u \circ v) \circ v \quad \text{car } u \circ v = v \circ u \\ &= (u \circ u) \circ (v \circ v) = (ku) \circ (kv) \quad \text{car } u \in \mathrm{A}_k \text{ et } v \in \mathrm{A}_k \\ &= k^2 u \circ v.\end{aligned}$$

Donc $u \circ v$ appartient à A_{k^2}.

b On a toujours $\mathrm{Im}\,(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\,(u)$ et comme $u \circ v = v \circ u$, on a également

$$\mathrm{Im}\,(u \circ v) = \mathrm{Im}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\,(v).$$

Par conséquent, on obtient $\mathrm{Im}\,(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$.

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$.

$$\begin{aligned}y \in \mathrm{Im}\,(u) &\Rightarrow \exists x_1 \in \mathrm{E},\ y = u(x_1),\\ y \in \mathrm{Im}\,(v) &\Rightarrow \exists x_2 \in \mathrm{E},\ y = v(x_2).\end{aligned}$$

Dès lors, on a d'une part $u(y) = u \circ u(x_1) = ku(x_1) = ky$ donc $y = \dfrac{1}{k}u(y)$, d'autre part, $u(y) = u \circ v(x_2)$ donc

$$y = \frac{1}{k}u(y) = \frac{1}{k}u \circ v(x_2) = u \circ v\left(\frac{1}{k}x_2\right) \in \mathrm{Im}\,(u \circ v).$$

Ainsi $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Im}\,(u \circ v)$.

Par double inclusion, on obtient $\mathrm{Im}\,(u \circ v) = \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$.

c On a toujours $\ker\,(v) \subset \ker\,(u \circ v)$ et comme $u \circ v = v \circ u$, on a également

$$\ker\,(u) \subset \ker\,(v \circ u) = \ker\,(u \circ v).$$

En tant que noyau d'une application linéaire, $\ker(u \circ v)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\ker(u) + \ker(v) \subset \ker(u \circ v)$.

Réciproquement. Soit $x \in \ker(u \circ v)$. On écrit $x = x - \frac{1}{k}u(x) + \frac{1}{k}u(x)$. On a déjà vu $x - \frac{1}{k}u(x) \in \ker(u)$ et comme $x \in \ker(u \circ v)$ et $u \circ v = v \circ u$, on a $\frac{1}{k}u(x) \in \ker(v)$. En effet,

$$v\left(\frac{1}{k}u(x)\right) = \frac{1}{k}v \circ u(x) = \frac{1}{k}u \circ v(x) = 0.$$

Dès lors $x = \underbrace{x - \frac{1}{k}u(x)}_{\in \ker(u)} + \underbrace{\frac{1}{k}u(x)}_{\in \ker(v)} \in \ker(u) + \ker(v)$. Ainsi $\ker(u \circ v) \subset \ker(u) + \ker(v)$.

Par double inclusion, il vient $\ker(u \circ v) = \ker(u) + \ker(v)$.

3 On suppose $u \circ v = v \circ u = 0$.

a) On a $(u+v) \circ (u+v) = u \circ u + u \circ v + v \circ u + v \circ v = ku + 0 + 0 + kv = k(u+v)$ donc $u + v$ appartient à A_k.

b) Soit $y \in \mathrm{Im}(u+v)$. Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que

$$y = (u+v)(x) = u(x) + v(x) \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).$$

Donc $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. Il existe $y_1 \in \mathrm{Im}(u)$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(v)$ tels que $y = y_1 + y_2$. Par ailleurs,

$$y_1 \in \mathrm{Im}(u) \text{ donc } \exists x_1 \in \mathrm{E},\ y_1 = u(x_1) \text{ et } y_2 \in \mathrm{Im}(v) \text{ donc } \exists x_2 \in \mathrm{E},\ y_2 = v(x_2).$$

Alors $u(y) = u \circ u(x_1) + u \circ v(x_2) = ku(x_1)$ car $u \in \mathrm{A}_k$ et $u \circ v = 0$. De même, $v(y) = v \circ u(x_1) + v \circ v(x_2) = kv(x_2)$. Par conséquent,

$$y = u(x_1) + v(x_2) = \frac{1}{k}u(y) + \frac{1}{k}v(y) = (u+v)\left(\frac{1}{k}y\right) \in \mathrm{Im}(u+v).$$

Donc $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u+v)$.

Par double inclusion, on obtient $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u+v)$.

c) Soit $x \in \ker(u) \cap \ker(v)$. Ainsi, $u(x) = v(x) = 0$ de quoi l'on déduit $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0$ puis $x \in \ker(u+v)$. On obtient ainsi $\ker(u) \cap \ker(v) \subset \ker(u+v)$.

Soit $x \in \ker(u+v)$. On a $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0$ donc $u(x) = -v(x)$. Dès lors, comme $u \in \mathrm{A}_k$, on a

$$ku(x) = u \circ u(x) = u(u(x)) = u(-v(x)) = -u \circ v(x) = 0 \text{ car } u \circ v = 0.$$

Étant donné que k est non nul, il vient $u(x) = 0$, ie $x \in \ker(u)$. De la même manière, on a

$$kv(x) = v \circ v(x) = v(v(x)) = v(-u(x)) = -v \circ u(x) = 0$$

donc $x \in \ker(v)$. Il s'ensuit $x \in \ker(u) \cap \ker(v)$.

On obtient ainsi l'inclusion $\ker(u+v) \subset \ker(u) \cap \ker(v)$.

Par double inclusion, il vient $\ker(u+v) = \ker(u) \cap \ker(v)$.