Séries numériques

Une seule réponse exacte par question.

1 Combien vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$?

a ☐ $\frac{3}{2}$ b ☐ $\frac{1}{2}$ c ☐ $\frac{3}{4}$ d ☐ $\frac{1}{4}$

2 Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\operatorname{sh} n}{a^n}$ est-elle convergente ?

a ☐ toutes b ☐ $a \geqslant 1$ c ☐ $a > 1$ d ☐ $a > e$

3 Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\sum \ln(u_n)$ converge.
Quelle série n'est pas nécessairement convergente ?

a ☐ $\sum u_n$
b ☐ $\sum e^{-nu_n}$
c ☐ $\sum \frac{u_n}{2^n}$
d ☐ $\sum (u_{n+1} - u_n)$

4 Soit $\alpha > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1$. La série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge si, et seulement si

a ☐ $\alpha > 1$ b ☐ $\alpha > \frac{1}{2}$ c ☐ $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ d ☐ $\alpha > 2$

5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de dire que la série $\sum v_n$ converge aussi ?

a ☐ $u_n \sim v_n$
b ☐ $v_n = \mathrm{o}(u_n)$
c ☐ $n^2 v_n = \mathrm{o}(u_n)$
d ☐ $\forall n, \quad v_n \leqslant u_n$

6 A laquelle des séries suivantes ne peut-on pas appliquer le critère spécial de convergence des séries alternées ?

a ☐ $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
b ☐ $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$
c ☐ $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$
d ☐ $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

7 Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'affirmer que $\sum u_n$ converge ?

a ☐ $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
b ☐ $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0
c ☐ $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$
d ☐ $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

8 Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

(a) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$

(b) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$

(c) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^2+1}$

(d) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$

9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n-2u_{n+1}+u_{n+2})$ vaut

(a) ☐ u_0

(b) ☐ u_0-u_1

(c) ☐ $u_0-2u_1+u_2$

(d) ☐ l'hypothèse ne suffit pas pour dire que la série proposée converge.

10 Combien vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}$?

(a) ☐ $\dfrac{e}{2}$

(b) ☐ $\sqrt{e}$

(c) ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(d) ☐ e^2

11 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir que cette série converge ?

(a) ☐ $u_n\leqslant\dfrac{1}{n}$

(b) ☐ $u_n^2\leqslant\dfrac{1}{n}$

(c) ☐ $\sqrt{u_n}\leqslant\dfrac{1}{n}$

(d) ☐ $e^{u_n}\leqslant\dfrac{1}{n}$

12 Pour laquelle des séries suivantes le critère de d'Alembert permet-il de montrer la convergence ?

(a) ☐ $\displaystyle\sum\frac{1}{n\ln^2 n}$

(b) ☐ $\displaystyle\sum\frac{n}{2^n}$

(c) ☐ $\displaystyle\sum\frac{\sin n}{n}$

(d) ☐ $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$

13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, A la propriété « $\sum u_n$ converge » et B la propriété « $\sum u_n^2$ converge ». Alors

(a) ☐ $\mathrm{A}\implies\mathrm{B}$

(b) ☐ $\mathrm{B}\implies\mathrm{A}$

(c) ☐ $\mathrm{A}\iff\mathrm{B}$

(d) ☐ il n'y a pas d'implication entre A et B.

14 Je suis une série qui converge grâce au critère spécial de convergence des séries alternées, mais je ne suis pas absolument convergente. Qui suis-je ?

(a) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$

(b) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

(c) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

(d) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n\sin n}{n}$

15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives. Quel lien logique y a-t-il entre les propositions

A :« $\sum u_n$ converge » et B :« $u_n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ » ?

ⓐ ☐ $A \implies B$

ⓑ ☐ $B \implies A$

ⓒ ☐ $A \iff B$

ⓓ ☐ il n'y a pas d'implication entre A et B.

16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Quelle condition est suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

ⓐ ☐ $\sum \sin u_n$ converge

ⓑ ☐ $\sum \frac{u_n}{2^n}$ converge

ⓒ ☐ $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge

ⓓ ☐ $\sum u_{2n}$ converge