E3A 2020 PT

1 Étudier la convergence de la série de terme général :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right).$$

2 On considère la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\geqslant 2}$, de premier terme $\mathrm{R}_2 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{R}_{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

(a) Calculer, pour tout entier $n \geqslant 4$, et de deux façons différentes :

$$\sum_{k=4}^{n}\left(\ln \mathrm{R}_k - \ln \mathrm{R}_{k-1}\right).$$

(b) La suite $(\ln(\mathrm{R}_n))_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente ?

(c) Justifier l'existence de :

$$\mathrm{R} = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\prod_{k=3}^{\mathrm{N}}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

On écrira, dans ce qui suit :

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\prod_{k=3}^{\mathrm{N}}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=3}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

3 (a) Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, de premier terme 1 *i.e.* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$.

(b) En déduire, pour tout t de $]0\,;1]$, l'expression de $\dfrac{1-(1-t)^n}{t}$ en fonction d'une somme.

(c) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t$$

Justifier que l'intégrale I_n est correctement définie.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

4 Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) Après avoir encadré $\dfrac{t}{n(n+t)}$ sur un intervalle bien choisi, étudier la convergence de la série de terme général u_n.

(b) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale u_n en fonction de n.

(c) En déduire l'existence de :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right).$$

5 Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on pose :

$$\mathrm{G}_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

On admettra que G est une fonction continue sur $[1\,;+\infty[$.

(a) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{G}_n(1)$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x :

$$\mathrm{G}_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

(On pourra utiliser des intégrations par parties successives.)

(c) Étudier, pour tout réel $x > 0$, la convergence de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right).$$

(d) En déduire, pour tout réel $x > 0$, la convergence de la suite $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)\right)_{\mathrm{N}\geqslant 1}$.

On notera dans la suite du problème

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

(e) Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{G}_n(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{\pi}{k}}\right).$$

(f) Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$\mathrm{H}(x) = xe^{\gamma x}\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{\pi}{k}}\right) = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{\Gamma}{k}}\right).$$

Montrer que, pour tout réel $x \in\,]0\,;1[$:

$$\mathrm{H}(x+1)\mathrm{H}(1-x) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{H}(x+1)}{\mathrm{H}(x)} = \frac{1}{x}.$$