E3A 2020 PT

J'ai essayé de rester au plus proche de la rédaction exigée au concours et laissé la plupart du temps le style de correction proposée

1. Notons $a_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)$ pour tout $n \geqslant 2$.

Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, en utilisant les équivalents $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos(x) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, on obtient

$$a_n = \ln\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi^2}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Les suites étant de signe constant (négatif), on peut conclure que les séries $\sum a_n$ et $\sum -\dfrac{\pi^2}{2n^2}$ sont de même nature, convergente d'après le critère de Riemann.

2. (a) Par récurrence évidente, on a $\forall\, n \geqslant 3$, $\mathrm{R}_n > 0$, donc $\ln(\mathrm{R}_n)$ a un sens.

D'une part, par télescopage, on a

$$\sum_{k=4}^{n} (\ln \mathrm{R}_k - \ln \mathrm{R}_{k-1}) = \ln(\mathrm{R}_n) - \ln(\mathrm{R}_3).$$

D'autre part, $\ln(\mathrm{R}_k) - \ln(\mathrm{R}_{k-1}) = \ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{k+1}\right)\right)$, donc

$$\sum_{k=4}^{n} (\ln(\mathrm{R}_k) - \ln(\mathrm{R}_{k-1})) = \sum_{k=4}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=4}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right).$$

(b) D'après la relation $\forall\, n \geqslant 4$, $\ln(\mathrm{R}_n) = \ln(\mathrm{R}_3) + \displaystyle\sum_{k=4}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$, la suite de terme général $\ln(\mathrm{R}_n)$ est convergente car la somme du second membre admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini.

(c) On a

$$\forall\, \mathrm{N} \geqslant 3, \quad \prod_{k=3}^{\mathrm{N}} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=2}^{\mathrm{N}-1} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{R}_{\mathrm{N}-1},$$

et ce terme admet une limite finie lorsque N tend vers l'infini car la suite $(\ln(\mathrm{R}_\mathrm{N}))_{\mathrm{N}\geqslant 2}$ est convergente, et la fonction exponentielle continue.

3. (a) Pour $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$.

(b) Avec $q = 1 - t \in]0\,;1]$, on obtient $\dfrac{1-(1-t)^n}{t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k$.

(c) L'intégrande $f : t \longmapsto \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$ est continue sur $]0\,;1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = n$ (DL) donc l'intégrale I_n est correctement définie.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^1 (1-t)^k\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

4 a) Pour tout $t \in [0\,;1]$, on a l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{t}{n(n+t)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, et en intégrant ceci sur le segment $[0,1]$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente d'après le critère de Riemann, et le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure que $\sum u_n$ est convergente.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{n+t-n}{n+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{n+t} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

c) Le résultat de la question précédente prouve l'existence de la limite, lorsque n tend vers l'infini, de

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - \ln(n) + \ln(1).$$

On en déduit le résultat demandé car le terme manquant $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

5 a) $\mathrm{G}_n(1) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \left[-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

b) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $t \longmapsto \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ et $t \longmapsto \dfrac{t^x}{x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;n]$, et les intégrales écrites sont bien définies, donc l'intégration par parties suivante est justifiée et on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_n(x) &= \left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x}\right]_0^n - \int_0^n n \times \left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\frac{t^x}{x}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n\times x}\underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{G}_{n-1}(x+1)}
\end{aligned}$$

Un nouvelle intégration par parties justifiée portant sur la dernière intégrale écrite donne :

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)}{n^2 \times x(x+1)}\underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{G}_{n-2}(x+2)}. \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Après un total de n intégrations par parties, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)\cdots 1}{n^n \times x(x+1)\cdots(x+n-1)}\underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^0 t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{G}_0(x+n)} \\
&= \frac{n!}{n^n \times x(x+1)\cdots(x+n-1)}\left[\frac{t^{x+n}}{x+n}\right]_0^n \\
&= \frac{n!\,n^{x+n}}{n^n \times x(x+1)\cdots(x+n)},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé après simplification par n^n.

(c) Pour $x>0$, $\ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{x}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{x^2}{2k^2}$, terme général de signe constant d'une série de Riemann convergente.

D'après les critères de comparaison des séries à terme positif, la série considérée est convergente pour tout $x>0$.

(d) Pour $x>0$ fixé, la suite

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{N}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)\right)=\sum_{k=1}^{N}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$$

possède une limite finie lorsque N tend vers l'infini d'après la question précédente.

Par continuité de la fonction exponentielle, il en va donc de même de la suite $\displaystyle\prod_{k=1}^{N}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{\pi}{k}}\right)$.

Notons que cette dernière limite est strictement positive (exponentielle).

(e) Réécrivons $G_n(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned}G_n(x)&=\frac{1}{x}\times\frac{n^x}{\left(\frac{1+x}{1}\right)\cdots\left(\frac{n+x}{n}\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{e^{x\ln(n)}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)}\times\frac{\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}}}{\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}}}\\&=\frac{1}{x}\times\frac{e^{x\left(\ln(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}{\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)}.\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, le numérateur tend vers $e^{-\gamma x}$ (par continuité de la fonction exponentielle) et le dénominateur vers la limite trouvée à la question précédente, ce qui est le résultat souhaité.

(f) Par définition, $\forall x>0$, $H(x)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)}$.

i. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\,]0\,;1[$, on a $1-x>0$ et

$$\begin{aligned}G_n(x+1)G_n(1-x)&=\frac{n!n^{x+1}}{(1+x)\cdots(n+1+x)}\times\frac{n!n^{1-x}}{(1-x)\cdots(n+1-x)}\\&=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\times\frac{((n+1)!)^2}{(1^2-x^2)\cdots((n+1)^2-x^2)}\\&=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\times\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Après passage à la limite (dont on sait qu'elle existe) et à l'inverse (strictement positif), on obtient

$$\forall x\in\,]0\,;1[\,,\quad H(x+1)H(1-x)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

ii. De même, pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{G_n(x+1)}{G_n(x)}=\frac{nx}{x+n+1},$$

donc en passant à la limite et à l'inverse, on obtient

$$\forall x > 0, \quad \frac{\mathrm{H}(x+1)}{\mathrm{H}(x)} = \frac{1}{x}.$$

Un peu d'histoire: *Si on considère un cercle unité C_1, et que l'on y inscrit un triangle équilatéral, à l'intérieur duquel on inscrit un cercle, C_2, à l'intérieur duquel on inscrit un triangle équilatéral, puis un cercle, puis un carré, à nouveau un cercle à l'intérieur du carré, puis un pentagone régulier à l'intérieur de ce cercle, ... en répétant à l'infini ce procédé, on s'aperçoit que les rayons des cercles C_n inscrits ainsi obtenus ont une limite finie, qui est la constante de Kepler-Bouwkamp :*

$$\prod_{k=3}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

et dont l'on doit l'origine à Johannes Kepler, qui pensait initialement que les orbites de Jupiter et Saturne autour du soleil pouvaient être approchées par des cercles de type C_1 et C_2, celle de Mars, de type C_3, celle de la Terre, de type C_4, etc ...

De façon amusante, si l'on considère un produit infini avec cette approximation, on obtient une expression faisant intervenir la fonction Gamma, Γ, historiquement définie par Leonhard Euler comme la limite donnée en question 5 b, et redéfinie ensuite par Karl Weierstrass par la formule donnée en question 5 e.