Intégration - Séries - Algèbre linéaire

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Il est demandé d'encadrer les résultats des calculs et de numéroter les copies. ***Une attention toute particulière devra être portée sur l'énoncé et le nom des théorèmes utilisés. Toute affirmation, même correcte, sans justification sera survolée de la même manière et oubliée.***

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation des calculatrices et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur la copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre

Problème 1 : On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{X} & & \mathrm{BX}. \end{array}$

1. (a) Démontrer que l'application f est linéaire.

   (b) Pour $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, montrer que $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$.

   (c) Déterminer une base ainsi que la dimension de $\ker(f)$.

   (d) f est-elle injective ? surjective ?

2. Soit $\mathrm{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / -2x+y+z=0 \right\}$.

   (a) Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer une base ainsi que la dimension de V.

3. (a) Démontrer que V et $\ker(f)$ sont des espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Donner les coordonnées de $\mathrm{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$.

   (d) En déduire que l'expression de la projection p sur V parallèlement à $\ker(f)$ s'écrit :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -x+y+z \\ y \\ -2x+y+2z \end{pmatrix}. \end{array}$$

4 On considère dorénavant $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ définie par $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ -x+y \\ x+y \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $g \circ f = p$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

(b) Montrer que $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{32}(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

(c) Donnez les valeurs de AB et BA.

On considère $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{32}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$ quelconques et telles que : $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de la suite du problème est de montrer que $\mathrm{BA} = \mathrm{Id}_2$.

5 On considère dans cette question : $h \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ telle que $h^3 = h^2$

Aide: On rappelle que $h^n = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{n \text{ fois}}$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}\ \left(h^2\right) \subset \ker\ (h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.

(b) Que vaut $\mathrm{rg}\ \left(h^2\right) + \dim\ \left(\ker\ \left(h^2\right)\right)$?

(c) Montrer que $\ker\ \left(h^2\right) \cap \ker\ (h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \{0\}$.

(d) Montrer que $\ker\ \left(h^2\right) \oplus \ker\ (h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2$.

6 On pose ici $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ d'expression :

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{BX} \qquad \text{et} \qquad g(\mathrm{X}) = \mathrm{AX}.$$

On pose également $h = f \circ g$. Il est déjà clair que $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

(a) Montrer que $h \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et que $g \circ f = p$.

(b) Montrer que $h^3 = h^2$.

(c) Montrer que si $x \in \mathrm{Im}\,(p)$ alors $f(x) \in \ker\ (h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.

(d) Vérifier que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p) = \{0\}$.

7 (a) Montrer que si $h^2 = 0$, alors $p = 0$ (on pourra calculer p^3).

(b) On suppose $\dim\ (\ker\ (h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})) = 1$ et on note $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathrm{Im}\,(p)$.

Montrer que $(f\,(u_1)\,, f\,(u_2))$ est liée. En déduire l'existence de $y \in \mathrm{Im}\,(p)$ non nul tel que $f(y) = 0$, puis aboutir à une contradiction.

(c) En déduire que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. On pourra utiliser **6** (c) et être amené à considérer $\dim\ (\ker\ (h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}))$.

(d) Montrer qu'alors $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_2$ (on pourra évaluer $f \circ g$ sur les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Problème 2 (D'après E3A 2018) : Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad f_n = h_n - \ln(n).$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1, \forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto x + \ln(1-x)$ et préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

2. (a) Montrer que $\forall\, x \in [0\,;1],\ \ \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire le signe de u_n et v_n pour $n \geqslant 1$.

3. Justifier que les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ sont convergentes.

4. (a) Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   Donner une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (v_n - u_n)$ en fonction de N.
   (b) Montrer que les suites $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   Que peut-on alors dire de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$?

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

5. Démontrer que $\gamma \in\,]0\,;1[$.

   Aide: On donne $\frac{3}{2} - \ln(2) \simeq 0,81$.

6. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :

$$\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

7. (a) Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite γ.

   Aide: On pourra exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ en fonction des termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Dans la suite de l'exercice, on note r un entier naturel > 1.

8. (a) Donner rapidement les variations de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^r}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soit N $\geqslant 2$. Montrer que :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N},\ \int_{\mathrm{N}}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{\mathrm{N}-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}.$$

9 (a) Soient a et X deux réels strictement positifs.

Après en avoir justifié l'existence, donner une expression de $\mathrm{I}_a(\mathrm{X}) = \displaystyle\int_a^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$.

(b) Déterminer $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \mathrm{I}_a(\mathrm{X})$. en fonction de a et r.

On notera dorénavant I_a cette limite et on écrira $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$.

10 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0 et telle que la suite $(n^r\,(w_{n+1}-w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell > 0$.

(a) Soient a, b dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < a < \ell < b$.

Justifier l'existence d'un entier naturel N supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait les inégalités :

$$a \leqslant n^r\,(w_{n+1}-w_n) \leqslant b.$$

(b) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N :

$$a\int_{\mathrm{N}}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant w_{n+1} - w_{\mathrm{N}} \leqslant b\int_{\mathrm{N}-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}.$$

(c) En déduire l'encadrement :

$$-\frac{1}{r-1}\,\frac{b}{(\mathrm{N}-1)^{r-1}} \leqslant w_{\mathrm{N}} \leqslant -\frac{1}{r-1}\,\frac{a}{\mathrm{N}^{r-1}}.$$

(d) Démontrer que la suite $\left(n^{r-1}w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de ℓ et r sa limite.

(e) Ce résultat reste-t-il vrai si la limite ℓ de la suite $(n^r\,(w_{n+1}-w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 ?

11 Démontrer qu'il existe un nombre réel α qu'on explicitera tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Aide: On appliquera les résultats de la question **10** à la suite définie par $w_n = \gamma - f_n$.

Si f est injective tout élément possède au plus un antécédent.

Mais qui peut le plus peut le moins, donc tout élément possède au moins un antécédent.

Donc f est surjective !

Évitez ça svp !