Intégration - Séries - Algèbre linéaire

Commentaires: *Malheureusement, vous êtes retombés dans vos travers. En mathématiques et comme dans la vie ou ce qu'elle devrait être, on n'affirme pas n'importe quoi sans justifier. Je vous l'accorde c'est un peu moins fun mais c'est aussi un petit peu plus intéressant que de lire des inepties toutes aussi plus grosses les unes que les autres.*

Ça passera en grandissant mais certaines confondent toujours $f(X)$, $f(x, y)$, $f(u)$, ...

Problème 1 :

1 (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in \mathbb{R}^3$, la linéarité à droite du produit matriciel donne rapidement

$$f(\lambda X + Y) = B(\lambda X + Y) = \lambda(BX) + (BY) = \lambda f(X) + f(Y).$$

Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3 ; \mathbb{R}^2)$.

(b) Il suffit d'exprimer le produit matriciel BX. Soit,

$$f(X) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}.$$

(c) On résout le système

$$f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \left\{\begin{array}{l} -x+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x = & z \\ y = 0 & \\ z = & z \end{array}\right. \iff X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc $\ker(f) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1 dont une base est donnée par la famille à un seul élément non nul $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ évidemment libre.

(d) D'après la question précédente, f n'est pas injective.

D'après le théorème du rang, on a $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker} f) = 3 - 1 = 2$. Comme $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, d'après les dimensions, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

2 (a) V est le noyau de la forme linéaire $p : (x ; y ; z) \longmapsto -2x + y + z$ c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Commentaires: *En rajoutant, que p est clairement non nulle, on peut même rajouter que V est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$... un peu normal pour un plan de l'espace.*

(b) Encore une fois, on résout le système :

$$Y\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff -2x+y+z=0 \iff \left\{\begin{array}{l} x = x \\ y = 2x - z \\ z = \quad z \end{array}\right. \iff Y \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc, $V = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant clairement libres par la présence de coordonnées nulles et générateurs par définition, ils forment une base de V qui est donc de dimension 2.

3 (a) D'après les questions précédentes, $\dim(\mathrm{V}) + \dim(\ker(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Il suffit de montrer que ces deux espaces sont en somme directe pour conclure à l'égalité.

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{V} \cap \ker(f)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{X} \in \mathrm{V} \iff -2\lambda + 0 + \lambda = 0 \iff \lambda = 0 \iff \mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } \mathrm{V} \cap \ker(f) \subset \{0\}.$$

L'intersection des deux sous-espaces V et $\ker(f)$ étant clairement un espace vectoriel qui contient $\{0\}$, on a bien $\mathrm{V} \cap \ker(f) = \{0\}$.

Les deux espaces sont donc en somme directe dans $\mathbb{R}^3$. Ils y sont supplémentaires.

Commentaires: *Je rappelle que deux sous-espaces vectoriels ne peuvent être disjoints.*

(b) Comme V et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, toute réunion d'une base de chacun d'eux formera une base de ce dernier.

D'après les questions précédentes, on sait que les candidates sont $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(c) Tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$ *i.e.*

$$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc le système par échelonnement puis réduction :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & \alpha & + & & + & \gamma \\ y & = & 2\alpha & - & \beta & & \\ z & = & & & \beta & + & \gamma \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & \alpha & + & & + & \gamma \\ -2x + y & = & & - & \beta & - & 2\gamma \\ -2x + y + z & = & & & & - & \gamma \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -x + y + z & = & \alpha \\ -2x + y + 2z & = & \beta \\ 2x - y - z & = & \gamma \end{array}\right.$$

Finalement,

$$\mathrm{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{(-x + y + z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2x + y + 2z)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{V}} + \underbrace{(2x - y - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ker(f)}.$$

$$\text{Donc,} \qquad \mathrm{X}\begin{pmatrix} -x + y + z \\ -2x + y + 2z \\ 2x - y - z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

(d) Par définition, $p_{|V} = \mathrm{Id}_V$ et $p_{|\ker(f)} = 0_{\mathscr{L}(\ker(f))}$. D'où,

$$\begin{aligned} p\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) &= p\left((-x+y+z)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + (-2x+y+2z)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + (2x-y-z)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= (-x+y+z)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + (-2x+y+2z)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+y+z\\ y\\ -2x+y+2z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Commentaires: *En plus simple mais qui ne fonctionne que parce que l'on vous donne l'expression de p, on peut aussi vérifier que $p^2 = p$, $\ker(p) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(p) = V$.*

4 (a) Nous savons qu'il suffit de montrer que deux applications coïncident sur une base pour conclure à leur égalité.

i. Pour $g \circ f$ et p, on compare naturellement leur image des vecteurs de $\mathcal{B}'$:

— Les images par p sont évidentes.

— Par définition, on a :

$$(g\circ f)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ (g\circ f)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{et}\ \ (g\circ f)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Les applications linéaires $g \circ f$ et p coïncident sur une base de V donc sont égales et on a :

$$g \circ f = p.$$

ii. Le raisonnement est identique pour $f \circ g$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ mais il est nettement plus aisé de regarder leur image de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$(f\circ g)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (f\circ g)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Les applications linéaires $f \circ g$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ coïncident sur une base de $\mathbb{R}^2$ donc sont égales et on a :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

(b) Assez facilement,

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\-x+y\\x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad \text{où } \mathrm{A} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&1\\1&1\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{32}(\mathbb{R}).$$

(c) Par simple calcul,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{BA} = \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&0\\-2&1&2\end{pmatrix}.$$

Commentaires: *À ce stade du cours, on ne le sait pas encore mais on vient juste de vérifier la question précédente.*

5 (a) Soit $x \in \text{Im}\left(h^2\right)$.

Alors, il existe $y \in \text{E}$ tel que $x = h^2(y)$.

On compose par h, pour obtenir $h(x) = h^3(y) = h^2(y) = x \iff h(x) - x = 0$.

Dis autrement, $x \in \ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)$ et $\text{Im}\left(h^2\right) \subset \ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)$.

(b) En dimension finie, pour $h^2\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, le théorème du rang affirme que :

$$\dim\left(\ker\left(h^2\right)\right) + \text{rg}\left(h^2\right) = \dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2.$$

(c) Soit $x \in \ker\left(h^2\right) \cap \ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)$.

Alors $h(x) = x$ et en composant par h, on obtient trivialement $0 = h^2(x) = h(x)$.

L'égalité $h(x) = x$ nous donne le résultat et l'inclusion $\ker\left(h^2\right) \cap \ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right) \subset \{0\}$.

L'inclusion réciproque étant claire, on a l'égalité :

$$\ker\left(h^2\right) \cap \ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right) = \{0\}\,.$$

(d) D'après 5 (a), $\text{rg}\left(h^2\right) = \dim\left(\text{Im}\left(h^2\right)\right) \leqslant \dim\left(\ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$.

D'après 5 (b), on a alors :

$$2 = \dim\left(\ker\left(h^2\right)\right) + \text{rg}\left(h^2\right) \leqslant \dim\left(\ker\left(h^2\right)\right) + \dim\left(\ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right) \leqslant 2.$$

On en déduit que $\dim\left(\ker\left(h^2\right)\right) + \dim\left(\ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right) = 2$.

Ces deux espaces étant en somme directe d'après 5 (c), on peut conclure à leur somme directe dans $\mathbb{R}^2$:

$$\ker\left(h^2\right) \oplus \ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right) = \mathbb{R}^2.$$

6 (a) La composée de deux endomorphismes est un endomorphisme donc $h \in \mathscr{L}(\text{E})$.

Commentaires: *Ça sert à quoi que j'aie montré que $\mathscr{L}(\text{E})$ était stable par composition si vous le refaites ?... mal*

Soit $\text{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $(g \circ f)(\text{X}) = \text{ABX} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ y \\ -2x+y+2z \end{pmatrix}$.

On reconnaît l'expression de p trouvée en 3 (d), donc

$$g \circ f = p.$$

(b) Il suffit de calculer $h^3 = (f \circ g)^3$ en profitant de l'associativité de la composition et que p soit un projecteur *i.e.* vérifiant $p^2 = p$:

$$\begin{aligned} h^3 &= (f \circ g) \circ (f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ \underbrace{(g \circ f) \circ (g \circ f)}_{p^2 = p = g \circ f} \circ g \\ &= (f \circ g) \circ (f \circ g) = h^2. \end{aligned}$$

(c) Question simple, il suffit d'écrire :

Soient $x \in \text{Im}\,(p)$ et $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = p(y)$. Comme p est un projecteur, on a $p(x) = p(y)$.

Alors,

$$h \circ f(x) = f \circ g \circ f \circ p(y) = f \circ \underbrace{p \circ p}_{p^2 = p}(y) = f \circ p(y) = f(x).$$

Finalement, $f(x) \in \ker\left(h - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)$.

(d) p est la projection parallèlement à $\ker(f)$ donc $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(p) = \{0\}$.

Commentaires: *Je rappelle que $f(x) = 0 \implies x = 0$ si, et seulement si f est injective.*

7 (a) Une plaisanterie : $p^3 = g \circ \underbrace{f \circ g \circ f \circ g}_{=h^2=0} \circ f = 0$.

Comme p est un projecteur, $p^3 = p^2 = p$ et la conclusion.

Par la contraposée, comme $p \neq 0$, on en déduit que $h^2 \neq 0 \iff \ker\left(h^2\right) \neq \mathbb{R}^2$.

(b) Simple reformulation de la question 6 (c) :

Comme $(u_1, u_2) \in (\mathrm{Im}\,(p))^2$ alors $(f(u_1), f(u_2)) \in (\ker(h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}))^2$ qui est de dimension 1 donc la famille à deux vecteurs est liée.

On en déduit que f (ou plutôt sa restriction) n'est pas injective sur $\mathrm{Im}\,(p)$ *i.e.* $\exists\, y \in \mathrm{Im}\,(p)$ non nul tel que $f(y) = 0$.

Mais alors $y \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \ker(f) = \{0\}$ d'après la question 6 (d) et $y = 0$ ce qui contredit sa définition.

En conclusion, $\dim(\ker(h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})) \neq 1$.

(c) D'après 7 (a), $h^2 \neq 0$ ce qui entraîne $\ker\left(h^2\right) \neq \mathbb{R}^2$ et donc $\dim\left(\ker\left(h^2\right)\right) \leqslant 1$.

Or, d'après 5 (d), $\dim\left(\ker\left(h^2\right)\right) + \dim\left(\ker\left(h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right) = 2$.

Donc $\dim\left(\ker\left(h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right) = 2 - \dim\left(\ker\left(h^2\right)\right) \geqslant 1$.

Comme $\dim\left(\ker\left(h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right) = 1$ est impossible d'après la question précédente, on en déduit :

$$\dim\left(\ker\left(h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right) = 2 \iff \ker\left(h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right) = \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent, $h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = 0 \iff h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

(d) Pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^2$, $h(\mathrm{X}) = (f \circ g)(\mathrm{X}) = \mathrm{BAX}$. Posons $\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

D'après la question précédente, $h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

D'où $h\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathrm{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = 1 \text{ et } c = 0.$

De même $h\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies b = 0 \text{ et } d = 1.$

Donc, $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_2$.

Problème 2 :

1 La fonction est définie sur $]-\infty\,; 1[$. Sur cet intervalle, elle est au moins de classe $\mathscr{C}^2$ et on a :

$$x + \ln(1-x) \underset{x \to 0}{=} x + -x - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Commentaires: *Point de développement de Taylor sans une classe appropriée.*

2 (a) La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1\,; +\infty[$. Sa courbe représentative est donc en dessous de ses tangentes.

En particulier, celle en 0 :

$$\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

Ce résultat reste vrai pour $x \in [0\,; 1]$.

Commentaires: *Un développement limité en 0 ne donne le signe ou toute autre information que sur un voisinage de 0 et pas ailleurs. C'est pour ça que l'on dit « limité ».*

(b) Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \in [0\,;1]$ d'où $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leqslant -\dfrac{1}{n}$.

On en déduit le signe de u_n et v_n :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 0 \quad \text{et} \quad v_n \geqslant 0.$$

Commentaires: *Pour tous ceux qui ont fait la remarque de la non définition de u_1, je les renvoie à l'énoncé où on pourra lire $u_1 = 1$. Même sans cette précision, la question portait sur le signe de u_n et on aurait pu y répondre de toute façon. Même pour u_1.*

3 Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(1)$, on peut appliquer le résultat de la question 1 :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}, \text{ terme de signe constant d'une série de Riemann convergente.}$$

D'après les critères de comparaison des séries à terme positif,

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est convergente.}$$

Le même raisonnement conduit à $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ qui est le terme général positif d'une série de Riemann convergente.

Ainsi,

$$\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ est convergente.}$$

Commentaires: *Au moins par respect devant son immense contribution à l'humanité, on ne dit pas « D'après Riemann… » Le pauvre monsieur est mort depuis bien longtemps et ne nous parle plus qu'à travers son critère, ses séries ou ses théorèmes.*

4 (a) On a déjà $v_1 - u_1 = -\ln(2)$.

$$\forall\, n \geqslant 2,\ v_n - u_n = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

En reconnaissant une somme télescopique, obtient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (u_n - v_n) &= -\ln(2) - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} (u_n - v_n)\\ &= \cancel{-\ln(2)} + \ln\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1}\right) \cancel{- \ln\left(\frac{1}{2}\right)}\\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{N}}\right).\end{aligned}$$

(b)
- D'après la question précédente, on sait déjà que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n = 0$.
- D'après 2 (b), la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est à terme négatif donc la suite de ses sommes partielles est décroissante.
- D'après 2 (b) toujours, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est à terme positif donc la suite de ses sommes partielles est croissante.

En conclusion, les suites $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}*}$ et $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}*}$ sont adjacentes. Elles convergent vers la même limite.

Commentaires: *remarquez que l'on a remontré que les deux séries étaient convergentes. Le sujet était ainsi fait...*

5 En particulier, $\forall \mathrm{N} \geqslant 1$,

$$0 < 1 - \ln(2) = \sum_{n=1}^{1} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n \leqslant \gamma \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n \sum_{n=1}^{2} u_n = 1 + u_2 = \frac{3}{2} - \ln(2) < 1.$$

Donc, $\gamma \in \left]0\,;1\right[$.

6 La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Une comparaison série intégrale donne alors :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

On en déduit que

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant h_n - 1 \leqslant \ln(n).$$

Enfin $1 - \ln(2) \geqslant 0$, entraîne :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

On n'oublie pas de vérifier l'encadrement reste vrai si $n = 1$: $\ln(2) \leqslant 1 \leqslant 1$.

7 (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = u_{n+1} \leqslant 0.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est bien décroissante.

(b) Il suffit de considérer la série télescopique de terme $f_{n+1} - f_n$ et de sommer l'identité ci-dessus pour $\mathrm{N} \geqslant 1$:

$$f_{\mathrm{N}} - 1 = f_{\mathrm{N}} - f_1 = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n - u_1 = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n - 1 \iff f_{\mathrm{N}} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente vers γ.

8 (a) Pour $r > 1$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^r}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Sa courbe y admet deux asymptotes : l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses en $+\infty$.

(b) C'est du cours.

Par décroissance de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^r}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall\, k \geqslant \mathrm{N} - 1 > 0, \forall\, t \in [\![k\,;k+1]\!]\,,\ \frac{1}{(k+1)^r} \leqslant \frac{1}{t^r} \leqslant \frac{1}{k^r}.$$

Et par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(k+1)^r} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant \frac{1}{k^r}. \tag{XXVI.1}$$

En sommant l'inégalité de gauche de (XXVI.1) pour $k \in [\![\mathrm{N}-1\,;n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=\mathrm{N}-1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^r} \leqslant \int_{\mathrm{N}-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \underset{\substack{\text{Changement}\\ \text{d'indice}}}{\iff} \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{\mathrm{N}-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}. \tag{XXVI.2}$$

En sommant l'inégalité de droite (XXVI.1) pour $k \in [\![\mathrm{N}\,;n]\!]$, on a :

$$\int_{\mathrm{N}}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \frac{1}{k^r}. \tag{XXVI.3}$$

Finalement, (XXVI.2) et (XXVI.3) réunies donnent :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, \quad \int_{\mathrm{N}}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{\mathrm{N}-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}.$$

Commentaires: *La continuité c'est bien avant d'intégrer.*

9 (a) D'après le théorème fondamental, la fonction continue $x \longmapsto \dfrac{1}{x^r}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ admet une primitive sur tout intervalle $[a\,;\mathrm{X}]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathrm{I}_a(\mathrm{X})$ existe et on a :

$$\mathrm{I}_a(\mathrm{X}) = \left[-\frac{1}{r-1}\frac{1}{t^{r-1}}\right]_a^{\mathrm{X}} = -\frac{1}{r-1}\frac{1}{\mathrm{X}^{r-1}} + \frac{1}{r-1}\frac{1}{a^{r-1}}.$$

(b) Si $r > 1$ alors $r-1 > 0$ et $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{X}^{r-1}} = 0$.

On en déduit :

$$\mathrm{I}_a = \frac{1}{r-1}\frac{1}{a^{r-1}}.$$

10 (a) Question qui fait peur mais qui n'est qu'une réécriture de la limite :

Comme $< a < \ell$, posons $\varepsilon = \dfrac{\ell - a}{2} > 0$.

Comme $\left(n^r\left(w_{n+1} - w_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang n_a tel que :

$$\begin{aligned} n > n_a \implies -\frac{\ell-a}{2} &\leqslant n^r\left(w_{n+1}-w_n\right) - \ell \leqslant \frac{\ell-a}{2} \\ a < \frac{\ell+a}{2} &\leqslant n^r\left(w_{n+1}-w_n\right). \end{aligned}$$

Le même raisonnement, en posant $\varepsilon = \dfrac{b-\ell}{2} > 0$ fournit un rang n_b tel que :

$$n > n_b \implies n^r\left(w_{n+1}-w_n\right) \leqslant \frac{b+\ell}{2} < b.$$

En posant $\mathrm{N} = \max\left(n_a\,;n_b\right)$, on a bien :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N} \implies a \leqslant n^r\left(w_{n+1}-w_n\right) \leqslant b.$$

(b) On reprend l'encadrement précédent avec $k \geqslant \mathrm{N}$. Après division par k^r non nul, on obtient :

$$a\,\frac{1}{k^r} \leqslant w_{k+1} - w_k \leqslant b\,\frac{1}{k^r}.$$

Sommons ces inégalités pour k variant de N à $n \geqslant \mathrm{N}$ et utilisons le résultat de 8 (b) pour obtenir :

$$a\int_{\mathrm{N}}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \left(w_{k+1}-w_k\right) \leqslant b\int_{\mathrm{N}-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}.$$

En reconnaissant (encore) une somme télescopique :

$$a\int_{\mathrm{N}}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant w_{n+1} - w_{\mathrm{N}} \leqslant b\int_{\mathrm{N}-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{r}.$$

c Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent ce qui est autorisé par 9 b.

Avec $\lim\limits_{n+\infty} w_n = 0$, on a :

$$a\mathrm{I}_\mathrm{N} \leqslant -w_\mathrm{N} \leqslant b\mathrm{I}_{\mathrm{N}-1} \iff -b\mathrm{I}_{\mathrm{N}-1} \leqslant w_\mathrm{N} \leqslant -a\mathrm{I}_\mathrm{N}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer I_N par sa valeur trouvée en 9 b :

$$-\frac{1}{r-1}\frac{b}{(\mathrm{N}-1)^{r-1}} \leqslant w_\mathrm{N} \leqslant -\frac{1}{r-1}\frac{a}{\mathrm{N}^{r-1}}. \tag{XXVI.4}$$

d En reprenant (XXVI.4) pour $n \geqslant 2$ dont on multiplie les membres par n^{r-1} strictement positif, on obtient derechef :

$$-\frac{1}{r-1}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-r}}_{\geqslant 1} b \leqslant n^{r-1}w_n \leqslant -\frac{1}{r-1}a.$$

Puis,

$$-\frac{1}{r-1}b \leqslant n^{r-1}w_n \leqslant -\frac{1}{r-1}a.$$

Cet encadrement est vrai pour tous réels a et b tels que $0 < a < \ell < b$.

Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on peut donc faire tendre a puis b vers ℓ dans l'inégalité précédente.

D'après le théorème d'encadrement, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{r-1}w_n = -\frac{\ell}{r-1}.$$

e Si la suite $(n^r(w_{n+1}-w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, le raisonnement et le résultat sont identiques en remplaçant a et b respectivement par $-\varepsilon$ et ε.

On obtient encore $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r-1}w_n = 0$ *i.e.* $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$.

11 Posons $w_n = \gamma - f_n$ (à partir du rang 1).

- D'après 7 b, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
- Pour $n \geqslant 1$, $w_{n+1} - w_n = f_n - f_{n+1} = -u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(w_{n+1}-w_n) = \frac{1}{2}$.
- D'après 10 d, $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = -\frac{1}{2}$ *i.e.* $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

On vient donc de montrer que $f_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$