Matrices et Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quel est le vecteur $u(e_1 + e_2 + e_3)$?

a ☑ $2e_1 + 3e_2$ b ☐ $2e_1 + e_2 - e_3$ c ☐ $e_1 + e_2 + e_3$ d ☐ $e_2 + 3e_3$

2 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. A la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de u dans une autre base $\mathcal{B}'$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :

a ☐ $\mathrm{A}' = \mathrm{PA}$
b ☐ $\mathrm{A}' = \mathrm{AP}^{-1}$
c ☐ $\mathrm{A}' = \mathrm{PAP}^{-1}$
d ☑ $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$

3 Soit E l'espace vectoriel de fonctions engendré par $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$. Quelle est la matrice de l'application linéaire $f \mapsto f'$ dans la base $\mathcal{B}$?

a ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
b ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
c ☑ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
d ☐ $\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x \end{pmatrix}$

4 Le rang d'une matrice A de taille $n \times p$ est

a ☐ le nombre de colonnes non nulles de A
b ☑ inférieur au nombre de colonnes non nulles de A
c ☐ supérieur au nombre de colonnes non nulles de A
d ☐ n moins le nombre de colonnes non nulles de A

5 La matrice d'un endomorphisme u dans une base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Sa matrice dans la base (e_2, e_1) est

a ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c ☑ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base d'un plan vectoriel E et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_2)$. Si un vecteur a pour coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$, ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont

a ☐ $(x + y, y)$ b ☐ $(x, x + y)$ c ☑ $(x, y - x)$ d ☐ $(x + y, -x)$

7 Laquelle des matrices suivantes définit un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

a ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b ☑ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

8 Soit E l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} - 1)$.

La matrice de f dans la base canonique de E est

a ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
b ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
c ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
d ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9 Soit s une symétrie de E et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.

La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est

a ☐ symétrique b ☐ diagonale c ☐ triangulaire d ☑ inversible

10 Soit E un espace vectoriel dont (e_1, e_2, e_3) est une base. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = e_1$.

La matrice de u dans la base $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est

a ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11 Soit A une matrice carrée réelle de taille 4 telle que $\mathrm{A}^2 = 0$.

L'ensemble des valeurs que peut prendre le rang de A est :

a ☐ $\{0\}$ b ☐ $\{0, 1\}$ c ☑ $\{0, 1, 2\}$ d ☐ $\{0, 1, 2, 3\}$