Déterminant

Une seule réponse exacte par question.

1 Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(nB)$ est égal à

(a) ☐ $n\det(B)$ (b) ☐ $n!\det(B)$ (c) ☐ $n^n\det(B)$ (d) ☐ $\det(B)^n$

2 Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix}$ est égal à

(a) ☐ $x+y+z$ (b) ☐ $x-y+z$ (c) ☐ $x-y-z$ (d) ☐ $x+y-z$

3 Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ de déterminant -1.

Laquelle des matrices suivantes n'a pas le même déterminant que A ?

(a) ☐ A^T (b) ☐ A^{-1} (c) ☐ $-A$ (d) ☐ A^2

4 Soient A, B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $C = ABA^{-1}B^{-1}$. Le déterminant de C

(a) ☐ vaut 1 car $C = I_n$
(b) ☐ ne vaut 1 que si A et B commutent
(c) ☐ vaut toujours 1
(d) ☐ ne peut être calculé en général

5 Dans l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant n$, quel est le déterminant de l'application linéaire $P \mapsto P'$?

(a) ☐ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ $n!$ (d) ☐ $(n+1)!$

6 Pour quelles valeurs du réel a la matrice $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

(a) ☐ pour $a \neq 0$
(b) ☐ pour $a \neq 0$ et $a \neq -1$
(c) ☐ pour $a \neq 0$ et $a \neq -2$
(d) ☐ pour $a \neq 0$ et $a \neq -3$

7 Pour calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, quelle méthode est la plus efficace ?

(a) ☐ le pivot de Gauß
(b) ☐ le développement suivant la première ligne
(c) ☐ le développement suivant la première colonne
(d) ☐ le calcul du déterminant de l'endomorphisme associé

8 Combien vaut le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$?

(a) ☐ -2 (b) ☐ 0 (c) ☐ 1 (d) ☐ 48

9 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E. Dans la base $\mathcal{B}$, la coordonnée de x selon le vecteur e_1 vaut :

(a) ☐ $\det_{\mathcal{B}}(e_1, x, x, \dots, x)$
(b) ☐ $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2+x, e_3+x, \dots, e_n+x)$
(c) ☐ $\det_{\mathcal{B}}(x, e_2, \dots, e_n)$
(d) ☐ $\det_{\mathcal{B}}(x+e_1, e_2, \dots, e_n)$

10 Soient $C_1, \dots, C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^n$. On suppose que

$$\det(\mathrm{Mat}(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)) = \det(\mathrm{Mat}(C_2, C_1, C_3, \dots, C_n))$$

Alors on peut en déduire que :

(a) ☐ $C_1 = C_2$
(b) ☐ $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$
(c) ☐ (C_1, C_2) est liée
(d) ☐ $(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$ est liée

11 Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$,$(y_1, \dots, y_n)$ deux familles de n vecteurs de E. Lorsqu'on développe complètement $\det_{\mathcal{B}}(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ par multilinéarité, on obtient

(a) ☐ 2 termes (b) ☐ $2n$ termes (c) ☐ n^2 termes (d) ☐ 2^n termes

12 Soit n un entier pair et $A = \mathrm{Mat}(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$.

On construit la matrice $B = \mathrm{Mat}(C_n, C_{n-1}, \dots, C_2, C_1)$ en réordonnant les colonnes de A. Quelle relation y a-t-il entre les déterminants de A et de B ?

(a) ☐ $\det A = \det B$
(b) ☐ $\det A = -\det B$
(c) ☐ $\det A = (-1)^n \det B$
(d) ☐ $\det A = (-1)^{\frac{n}{2}} \det B$

13 La fonction $x \mapsto \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(a) ☐ est un polynôme de degré 3
(b) ☐ est un polynôme de degré 2
(c) ☐ est un polynôme de degré 1
(d) ☐ n'est pas un polynôme