Déterminant

Exercice 1 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé) et $n \geqslant 3$.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant le déterminant de taille $n-1$ par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x).$$

La suite $(\mathrm{D}_n(x))_{n\geqslant 1}$ est bien **récurrente linéaire d'ordre 2**.

2. Montrons que par récurrence double sur n que pour tout $n \geqslant 1$, D_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1.

- $\begin{cases} \mathrm{D}_1(x) = x+2 \\ \mathrm{D}_2(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2+4x+3 \end{cases}.$

  La propriété est bien vérifiée aux rangs 1 et 2.
- Soit $n \geqslant 3$. Supposons que la propriété soit vérifiée aux rangs $n-1$ et $n-2$.

  D_{n-1} et D_{n-2} sont donc des fonctions polynomiales.

  Comme $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x)$, on en déduit que D_n est encore une **fonction polynomiale**.

  De plus, $\begin{cases} \mathrm{D}_{n-1} = x^{n-1} + \cdots \\ \mathrm{D}_{n-2} = x^{n-2} + \cdots \end{cases}$, les pointillés représentant des termes de degré inférieur à celui qui précède.

  Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_n(x) &= (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x) \\ &= (x+2)[x^{n-1}+\cdots] - [x^{n-2}+\cdots] \\ &= x^n + \cdots \end{aligned}$$

  D_n est encore une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1.

3. (a) Par hypothèse, $|x+2| < 2$, donc $\left|\dfrac{x+2}{2}\right| < 1$ ou encore $-1 < \dfrac{x+2}{2} < 1$.

D'après le théorème de la bijection appliqué à la fonction cos continue sur $]0\,;\pi[$, on en déduit qu'il existe (un unique) $\theta \in]0,\pi[$ tel que $x+2 = 2\cos(\theta)$.

On peut même exprimer $\theta = \arccos\dfrac{x+2}{2}$.

(b) La relation de récurrence linéaire double est : $\mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x)$.

L'équation caractéristique est $r^2 - (x+2)r + 1 = 0$ ou encore $r^2 - (2\cos(\theta))r + 1 = 0$.

Son discriminant réduit est $\Delta' = \cos^2(\theta) - 1 = -\sin^2\theta = (i\sin(\theta))^2$.

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes : $r = \cos + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ et son conjugué.

Il existe donc deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathrm{D}_n(x) = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$$

Or, $\begin{cases} \mathrm{D}_1(x) = x+2 \\ \mathrm{D}_2(x) = (x+2)^2 - 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta) = 2\cos(\theta) \\ \lambda\cos 2\theta + \mu\sin 2\theta = 4\cos^2(\theta) - 1 \end{cases}$.

On peut écrire le système matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 4\cos^2(\theta) - 1 \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \end{vmatrix} = \cos(\theta)\sin(2\theta) - \cos(2\theta)\sin(\theta) = \sin(\theta) \neq 0$ (puisque $\theta \in]0,\pi[$).

On en déduit que la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \sin(2\theta) & -\sin(\theta) \\ -\cos(2\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où, } \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \sin(2\theta) & -\sin(\theta) \\ -\cos(2\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 4\cos^2(\theta) - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} 2\cos(\theta)\sin(2\theta) - \sin(\theta)(4\cos^2(\theta) - 1) \\ -2\cos(\theta)\cos(2\theta) + \cos(\theta)(4\cos^2(\theta) - 1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où $\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathrm{D}_n(x) = \cos(n\theta) + \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(n\theta) = \dfrac{\sin(\theta)\cos(n\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathrm{D}_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

4 Posons $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$. Les θ_k sont k valeurs distinctes de $]0,\pi[$.

À chaque θ_k est associé un x_k par la formule $x_k + 2 = 2\cos(\theta_k)$.

Comme la fonction $\theta \mapsto 2\cos(\theta) - 2$ est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, elle est donc injective, et les x_k sont tous distincts.

Mais $D_n(x_k) = \dfrac{\sin((n+1)\theta_k)}{\sin(\theta_k)} = \dfrac{\sin(k\pi)}{\sin(\theta_k)} = 0$.

Donc, les $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont des racines distinctes de D_n.

Et comme D_n est de degré n, il ne peut avoir plus de n racines.

Remarque : $x_k = 2(\cos(\theta_k) - 1) = 2\left(1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\theta_k}{2}\right) - 1\right) = -4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$.

$$\text{Les racines de } D_n \text{ sont les } -4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \text{ pour } k \in [\![1, n]\!].$$

Comme le coefficient dominant de D_n est 1, on en déduit directement la factorisation :

$$D_n = \prod_{k=1}^{n} \left[X + 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)\right].$$

5 D'après précédemment, $\forall n \geqslant 1$, $D_n(x) = \dfrac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin(\theta)}$ avec $\cos(\theta) = \dfrac{x+2}{2}$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0} D_n(x) = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin(\theta)} = \dfrac{(n+1)\theta}{\theta} = n+1$ par développement limité.

D_n étant un polynôme, il est continue en 0 et on a donc $\forall n \geqslant 1$, $D_n(0) = n+1$.

On en déduit que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = n+1$ puis (le produit des sinus étant positif) que :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

Exercice 2 :

1 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi(x) = \det\left(A - xI_3\right) &= \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ -4 & 0 & -2-x \end{vmatrix} \\
&= +(2-x)\begin{vmatrix} 4-x & 2 \\ -4 & -2-x \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la deuxième colonne} \\
&= +(2-x)\begin{vmatrix} 4-x & 2 \\ -x & -x \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= +(2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 0 & -x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&= -x(2-x)^2
\end{aligned}$$

On a donc $\chi(x) = -x(2-x)^2$. Le polynôme χ admet effectivement deux racines : $\lambda = 0$ de multiplicité 1 et $\mu = 2$ de multiplicité 2.

2 Posons $u = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
u \in E_\lambda &\iff u \in \ker\left(f - \lambda I_d\right) \iff (f - 0I_d)(u) = 0 \iff f(u) = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1} \iff \begin{cases} 4x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -4x - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2x \\ y = x \end{cases} \\
&\iff u = (x, x, -2x) \iff u \in \operatorname{vect}\left((1, 1, -2)\right).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E}_\lambda = \mathbb{R}u_0$ en posant $u_0 = (1,1,-2)$. E_λ est un sev de dimension 1.

3 Posons $u = (x,y,z)$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{E}_\mu &\iff u \in \ker(f - \mu \mathrm{I}_d) \iff (f - 2\mathrm{I}_d)(u) = 0 \\
&\iff \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1} \iff \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -4x - 4z = 0 \end{cases} \iff x + z = 0 \\
&\iff u = (x, y, -x) \iff u = x(1,0,-1) + y(0,1,0) \\
&\iff u \in \mathrm{vect}\left((1,0,-1),(0,1,0)\right).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E}_\mu = \mathrm{vect}(v_0, w_0)$ en posant $v_0 = (1,0,-1)$ et $w_0 = (0,1,0)$.

Les vecteurs v_0 et w_0 sont non colinéaires ; la famille (v_0, w_0) est donc une base de E_μ, qui est donc de dimension 2.

4 Considérons la famille $\mathcal{B} = (u_0, v_0, w_0)$.

La matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}_0$ est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\det \mathrm{P} = -1 \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

Par conséquent, $\mathrm{vect}(\{u_0\}) \oplus \mathrm{vect}(\{v_0, w_0\}) = \mathbb{R}^3$, *i.e.* $\mathrm{E}_\lambda \oplus \mathrm{E}_\mu = \mathbb{R}^3$.

Commentaires: *On pouvait aussi montrer que $u_0 \notin \mathrm{vect}(v_0, w_0)$ en plus des dimensions qui se ramène à prouver la liberté de $\mathcal{B}$.*

5 Par construction, on a $f(u_0) = 0$, $f(v_0) = 2v_0$, et $f(w_0) = 2w_0$. Et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \Delta \text{ en posant } \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6 On peut exprimer A en fonction de Δ par les formules de changement de base : $\mathrm{A} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$.

On a donc (classique) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{A}^n = \mathrm{P}\Delta^n\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2^n \\ 2^n & 2^n & 2^n \\ -2^{n+1} & 0 & -2^n \end{pmatrix}.$$

Commentaires: *On pouvait également prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{A}^n = 2^{n-1}\mathrm{A}$, après l'avoir remarqué directement.*

Enfin, on pouvait constater que $\dfrac{1}{2}\Delta$ était une matrice de projecteur. Par conséquent, f est un projecteur.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\dfrac{1}{2}f\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}f\right)$ et donc $f^n = 2^{n-1}f$. Il suffisait alors d'interpréter matriciellement cette écriture.