Déterminant

Exercice 1 : On pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x+2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}$ (déterminant de taille n).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé). Prouver que la suite $(D_n(x))_{n \geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
2. Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction polynomiale de degré n.

   Préciser son coefficient dominant.
3. On suppose dans cette question que $|x+2| < 2$.
   - a) Justifier qu'on peut poser $x + 2 = 2\cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$.
   - b) Exprimer $D_n(x)$ en fonction de $\sin((n+1)\theta)$ et $\sin\theta$.
4. En déduire les racines du polynôme D_n puis la factorisation de D_n.
5. En calculant $D_n(0)$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$

Exercice 2 : On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$. On note I_d l'identité de $\mathbb{R}^3$.

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer *avec élégance* : $\chi(x) = \det(A - xI_3)$.

   Aide: On vérifiera que le polynôme χ admet exactement deux racines λ et μ ($\lambda < \mu$).
2. Déterminer une base de $E_\lambda = \ker(f - \lambda I_d)$.
3. Déterminer une base de $E_\mu = \ker(f - \mu I_d)$.
4. Montrer que $E_\lambda \oplus E_\mu = \mathbb{R}^3$.
5. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. Écrire cette matrice.
6. Déterminer l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que :

— χ est le *polynôme caractéristique* de A (ou f) ;

— λ et μ sont les *valeurs propres* de A (ou f) ;

— E_λ et E_μ sont les *espaces propres* de A (ou f) associés respectivement à λ et μ ;

— les vecteurs non nuls de E_λ et E_μ sont les *vecteurs propres* de A (ou f).