Un peu de tout

A. Premier contact

ⓐ Soit $f \in \mathrm{E}$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $t \longmapsto (x-t)f(t)$ est continue sur le segment $[0;x]$ (ou $[x;0]$).

Donc, $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini ; ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(f)$ existe pour tout $f \in \mathrm{E}$.

On en conclut que φ est bien définie sur E.

Commentaires: *C'est la fonction $t \longmapsto (x-t)f(t)$ qui doit être continue et non $x \longmapsto (x-t)f(t)$.*

Soit $f \in \mathrm{E}$. Posons $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G} : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Puisque les fonctions f et $t \longmapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, alors par le théorème fondamental de l'analyse, F et G sont bien définies et sont des primitives de f et $t \longmapsto tf(t)$ respectivement.

Donc, F et G sont a fortiori dérivable et donc continues sur $\mathbb{R}$.

Or, on observe que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = x\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x)$.

Donc, comme produit et différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, $\varphi(f)$ est continue *i.e.* $\varphi(f) \in \mathrm{E}$. Ceci étant vrai pour tout $f \in \mathrm{E}$, on en déduit bien que φ est à valeur de E dans E.

Commentaires: *fondamental sans e à la fin !*

Montrons de plus que φ est linéaire.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x (x-t)(\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$.

Donc φ est linéaire.

Conclusion : $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Commentaires: *Ne pas oublier de montrer que $\varphi(f) \in \mathrm{E}$. Même chose lorsqu'on vous demandera de montrer que telle ou telle application est un endomorphisme. Le côté linéaire certes, mais aussi la stabilité de l'ensemble dans lequel vous êtes.*

Tant qu'à y être, mieux vaut montrer que $varphi(f) \in \mathrm{E}$ avant de montrer la linéarité de φ. C'est toujours mieux de travailler avec quelque chose dont on est sûr de l'existence.

ⓑ Soit $f \in \mathrm{E}$. On a :

$$\varphi(f)(0) = \int_0^0 (-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc toutes les images par φ s'annule en 0.

En particulier, la fonction constante $g : x \longmapsto 1$ est un élément de E qui ne s'annule pas en 0 et donc $g \notin \mathrm{Im}\,(\varphi)$ et $\mathrm{Im}\,(\varphi) \neq \mathrm{E}$.

Conclusion : $\forall f \in \mathrm{E},\ \varphi(f)(0) = 0$ et φ n'est pas surjective.

c) La famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de A par définition.

Par linéarité de f,

$$\varphi(\mathrm{A}) = \varphi\left(\mathrm{vect}\left(e_1, e_2\right)\right) = \mathrm{vect}\ \left(\varphi(e_1), \varphi(e_2)\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\varphi(e_1)(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Procédons à une intégration par partie. Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = x - t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = -1 \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\varphi(e_1)(x) = \left[(x-t)\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0 - x + \left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} = \mathrm{e}^x - 1 - x.$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}\varphi(e_2)(x) &= \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-(x-t)\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (-1)\left(-\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t \\ &= 0 + x - \left[-\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= x - 1 + \mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

Posons $f_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ et $f_2 : x \longmapsto x - 1 + \mathrm{e}^{-x}$ et $\mathscr{F} = (f_1, f_2)$. Alors, $\varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\mathscr{F}\right)$ *i.e.* $\mathscr{F}$ engendre $\varphi(\mathrm{A})$.

Montrons que $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{aligned}\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathrm{E}} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1\,\mathrm{e}^x - \lambda_1 - \lambda_1 x + \lambda_2 x - \lambda_2 + \lambda_2 e^{-x} = 0.\end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 0$,

$$\lambda_1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 = 2\lambda_2 = 0 \iff \lambda_2 = 0.$$

En évaluant en 1, on obtient également,

$$\lambda_1 \mathrm{e} - 2\lambda_1 + \lambda_2 e^{-1} = \lambda_1(\mathrm{e} - 2) + 0 = 0 \iff \lambda_1 = 0 \quad \text{car } \mathrm{e} \neq 2.$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\mathscr{F}$ est libre.

Conclusion : $\mathscr{F} = \left(x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1 - x, x \longmapsto x - 1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$ est une base de $\varphi(\mathrm{A})$.

d) Par définition, $\varphi(f)(\pi) = \displaystyle\int_0^\pi (\pi - t)t\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons $s = \pi - t$ alors $\mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}t$ et donc

$$\begin{aligned}\varphi(f)(\pi) &= \int_{\pi}^{0} (s)(\pi - s)\cos^{2n+1}(\pi - s)(-1)\mathrm{d}s \\ &= \int_{0}^{\pi} s(\pi - s)(-1)^{2n+1}\cos^{2n+1}(s)\mathrm{d}s \\ &= -\int_{0}^{\pi} s(\pi - s)\cos^{2n+1}(s)\mathrm{d}s \\ &= -\varphi(f)(\pi).\end{aligned}$$

Nécessairement, on en déduit que $\varphi(f)(\pi) = 0$.

B. RÉGULARITÉ :

(e) Par le théorème fondamental de l'analyse, on sait que $\mathrm{F} : x \longmapsto \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons $\mathrm{G} : x \longmapsto \int_0^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t$. Comme vu en question (a), on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = x\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x).$$

Puisque F et G sont deux primitives, ces fonctions sont notamment dérivables.

De plus $\mathrm{F}' = f$ et $\mathrm{G}' : t \longmapsto tf(t)$. Donc leurs dérivées sont continues et donc F et G sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme produit et différence de deux fonctions $\mathscr{C}^1$, on en déduit que $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)'(x) = \mathrm{F}(x) + x\mathrm{F}'(x) - \mathrm{G}'(x) = \mathrm{F}(x) + xf(x) - xf(x) = \mathrm{F}(x).$$

Conclusion :$\varphi(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $\varphi(f)' = \mathrm{F}$.

Commentaires: *C'est le fait que f soit continue qui fait que sa primitive est de classe $\mathscr{C}^1$, pas l'inverse. De plus, il n'est nulle part précisé que f était dérivable. Continue seulement !!!*

(f) Puisque F est $\mathscr{C}^1$ (en tant que primitive de f continue) et $\varphi(f)' = \mathrm{F}$ par la question précédente, on en déduit que $\varphi(f)'$ est $\mathscr{C}^1$ *i.e.* $\varphi(f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. De plus,

$$\varphi(f)'' = \mathrm{F}' = f.$$

Conclusion : $\varphi(f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et $\varphi(f)'' = f$.

(g) Soit $f \in \ker(\varphi)$ *i.e.* $\varphi(f) = 0_{\mathrm{E}}$. Par la question précédente, on en déduit que

$$f = \varphi(f)'' = 0_{\mathrm{E}}'' = 0_{\mathrm{E}}.$$

Donc $\ker(\varphi) \subseteq \{0_{\mathrm{E}}\}$. L'autre inclusion étant toujours vraie car $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $\ker(\varphi) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ *i.e.* φ est injective.

Commentaires:

- *Le théorème du rang n'est absolument pas applicable en dimension infinie !!!!*
- *L'implication intégrale nulle, fonction nulle n'est vraie que pour les fonctions de signe constant.*

(h) Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\varphi(f) = f + 1$.

Par les questions précédentes, on sait que $\varphi(f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, donc $f = \varphi(f) - 1 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Alors, en dérivant deux fois, on obtient

$$\varphi(f)'' = f'' \iff f = f''.$$

Donc f est solution de l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants $y'' - y = 0$ dont l'équation caractéristique est donnée par $r^2 - 1 = 0$ qui a deux racines réelles $r = 1$ et $r = -1$.

Ainsi, il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^t + \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Réciproquement, soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^t + \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-t}$.

Autrement dit, avec les notations de la question c.

$$f = \mathrm{A}e_1 + \mathrm{B}e_2.$$

Donc par linéarité de φ, $\varphi(f) = \mathrm{A}\varphi(e_1) + \mathrm{B}\varphi(e_2)$. On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = \mathrm{A}\left(\mathrm{e}^x - 1 - x\right) + \mathrm{B}\left(x - 1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = (\mathrm{B} - \mathrm{A})x - (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + f(x).$$

On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi(f) = f + 1 &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{B} - \mathrm{A})x - (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + f(x) = f(x) + 1 \\
&\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{B} - \mathrm{A})x - (\mathrm{A} + \mathrm{B}) - 1 = 0 \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{B} - \mathrm{A} = 0 \\ -(\mathrm{A} + \mathrm{B}) - 1 = 0 \end{cases} && \text{par identification} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{B} \\ -2\mathrm{A} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} = -\operatorname{ch}(t).
\end{aligned}$$

Conclusion : L'unique solution est $f = -\operatorname{ch}$.

C. Un exemple :

i. Soit $x \in [1; +\infty[$. Par définition puis la relation de Chasles,

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in [1; x]$, $f(t) > 0$ et $x - t \geqslant 0$. Donc $(x - t)f(t) \geqslant 0$.

Par positivité de l'intégrale CAR $x \geqslant 1$ (important !)

$$\int_1^x (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

D'où : $\forall\, x \geqslant 1, \quad \varphi(f)(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t.$

j. Soit $x \geqslant 1$, par la question précédente, $\varphi(f)(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Or pour tout $t \in [0; 1]$,

$$0 < \mathrm{e}^{-1} < f(t) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x - 1 \leqslant x - t.$$

Les deux termes étant positifs, par produit, on obtient que

$$\forall\, t \in [0; 1], \quad 0 \leqslant (x - 1)\,\mathrm{e}^{-1} \leqslant (x - t)f(t).$$

Par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(f)(x) \geqslant \int_0^1 (x - 1)\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}t = (x - 1)\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\,\mathrm{e}^{-1}=+\infty$.

Donc, par le théorème de minoration, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(f)(x)=+\infty$.

k) On a déjà vu que puisque $f\in\mathrm{E}$, alors $\varphi(f)\in\mathrm{E}$ et donc est notamment définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 .

De plus, pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\varphi(f)(-x)=\int_0^{-x}(-x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-x}^{0}(x+t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $s=-t$ *i.e.* $t=-s$ et donc $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}s$.

Ainsi,

$$\varphi(f)(-x)=\int_x^{0}(x-s)\,\mathrm{e}^{-s^2}(-1)\mathrm{d}s=\int_0^{x}(x-s)\,\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\varphi(f)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$. On conclut que $\varphi(f)$ est paire.

l) Par ce qui précède, on sait que $\varphi(f)$ est dérivable et $\varphi(f)'=\mathrm{F}$, où F est l'unique primitive de $f:t\longmapsto\mathrm{e}^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 .

Donc,

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{F}'(x)=f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}>0.$$

Par conséquent, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\mathrm{F}(0)=0$. Donc F est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\varphi(f)(0)=0$ et par la question précédente $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(f)(x)=+\infty$. Par parité, on obtient directement que $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(f)(x)=+\infty$. On en déduit donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\mathrm{F}(x)$		$-$	0	$+$	
variations de $\varphi(f)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

m) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $t\in[0;x]$,

$$0<\mathrm{e}^{-t^2}\leqslant 1\implies 0\leqslant(x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\leqslant x-t\quad\text{car } x-t>0.$$

Par croissance de l'intégrale CAR $x\geqslant 0$,

$$0\leqslant\varphi(f)(x)\leqslant\int_0^x(x-t)\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{t=0}^{t=x}=\frac{x^2}{2}.$$

Si $x\leqslant 0$, en posant $y=-x$ on a :

$$0\leqslant\varphi(f)(y)\leqslant\frac{y^2}{2}\iff 0\leqslant\varphi(f)(-x)\leqslant\frac{(-x)^2}{2}.$$

Or $\varphi(f)$ étant paire, on conclut que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\quad 0\leqslant\varphi(f)(x)\leqslant\dfrac{x^2}{2}$.

n) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_-$. La fonction exp est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x;0]$. Donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \sup_{z\in[x;0]} \left|\exp^{(n+1)}(z)\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or, $\sup_{z\in[x;0]} \left|\exp^{(n+1)}(z)\right| = \sup_{z\in[x;0]} |\,\mathrm{e}^z| = 1$. Ainsi,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En posant $x = -t^2 \in \mathbb{R}_-$, on obtient

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left| \mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

o) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question précédente, pour tout $t \in [0;x]$,

$$\left| \mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Puisque $x - t \geqslant 0$, on en déduit que

$$(x-t)\left| \mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| \leqslant (x-t)\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}$$

$$\left| (x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(xt^{2k} - t^{2k+1}\right) \right| \leqslant \frac{xt^{2n+2} - t^{2n+3}}{(n+1)!}.$$

Par croissance de l'intégrale, car $x \geqslant 0$, on a

$$\int_0^x \left| (x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(xt^{2k} - t^{2k+1}\right) \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{xt^{2n+2} - t^{2n+3}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Or, par l'inégalité triangulaire, car $x \geqslant 0$, on a

$$\left| \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(xt^{2k} - t^{2k+1}\right) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \left| (x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(xt^{2k} - t^{2k+1}\right) \right| \mathrm{d}t.$$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\left| \varphi(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x xt^{2k} - t^{2k+1}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x xt^{2n+2} - t^{2n+3}\,\mathrm{d}t$$

$$\left| \varphi(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left[x\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{2k+2}}{2k+2} \right]_{t=0}^{t=x} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left[x\frac{t^{2n+3}}{2n+3} - \frac{t^{2n+4}}{2n+4} \right]_{t=0}^{t=x}$$

$$\left| \varphi(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x^{2k+2}}{2k+1} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2} \right) \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{x^{2n+4}}{2n+3} - \frac{x^{2n+4}}{2n+4} \right)$$

$$\left| \varphi(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{k!} \frac{2k+2-2k-1}{(2k+1)(2k+2)} \right| \leqslant \frac{x^{2n+4}}{(n+1)!} \frac{2n+4-2n-3}{(2n+3)(2n+4)}$$

$$\left| \varphi(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{k!(2k+1)(2k+2)} \right| \leqslant \frac{x^{2n+4}}{(n+1)!(2n+3)(2n+4)}.$$

D. Une suite… d'intégrales !

(p) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \left[\frac{1}{n^{1/4}}; 1\right]$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant t^2 \leqslant 1 \implies -1 \leqslant -t^2 \leqslant -\frac{1}{\sqrt{n}} \implies -n \leqslant -nt^2 \leqslant -\sqrt{n}.$$

Donc par croissance de la fonction exponentielle,

$$0 < \mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

De plus, pour tout $t \in \left[\frac{1}{n^{1/4}}; 1\right]$, on a $1 - t \geqslant 0$, donc

$$\forall t \in \left[\frac{1}{n^{1/4}}; 1\right], \quad 0 \leqslant (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant (1-t)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

Donc par croissance de l'intégrale car $\frac{1}{n^{1/4}} \leqslant 1$, on a

$$0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \int_{\frac{1}{n^{1/4}}}^{1} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{n^{1/4}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = 0$.

Donc par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0.$$

Commentaires: *Même si c'est tentant, le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{4}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2} = 0$, ne vous autorise en rien à intervertir la limite et le signe intégral i.e. dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n^{1/4}}}^{1} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$. Je veux bien qu'il faille croire en ses rêves mais là c'est noël avant l'heure. Plus mathématiquement, il vous manque des théorèmes beaucoup plus forts d'interversion de limites dont vous verrez certains l'année prochain sous le joli nom de « théorème de convergence dominée » et plus pédagogiquement, cessez, arrêtez, suspendez, renoncez, oubliez toutes vos vélléités d'affirmer ce qui vous arrange. Ce n'est ni des mathématiques ni de la science. Du spiritisme et du mysticisme tout au plus.*

(q) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la relation de Chasles, on a

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-t)\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n^{1/4}}} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{J}_n$$

Or, pour tout $t \in \left[0; \frac{1}{n^{1/4}}\right]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 1$.

Donc

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{n^{1/4}}\right], \quad 0 \leqslant (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 1.$$

Par croissance de l'intégrale, car $\frac{1}{n^{1/4}} \geqslant 0$, on obtient que

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{n^{1/4}}} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{n^{1/4}}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^{1/4}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{1/4}}=0$, on en déduit, par le théorème d'encadrement, que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n^{1/4}}}(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t=0.$$

De plus par la question précédente, on a $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n=0$.

Conclusion : $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

r Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $t\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on a

$$0\leqslant t^2\leqslant\frac{1}{n}\implies 0\geqslant -nt^2\geqslant -1.$$

Par croissance de l'exponentielle et positivité de $1-t$,

$$\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{e}^{-nt^2}\leqslant 1\implies (1-t)\,\mathrm{e}^{-1}\leqslant(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geqslant 0$, on en déduit que

$$\mathrm{K}_n\geqslant\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-t)\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-1}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}1-t\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{K}_n\geqslant\mathrm{e}^{-1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}1-t\,\mathrm{d}t.$

s Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par la relation de Chasles, on a :

$$\mathrm{I}_n=\mathrm{K}_n+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}};1\right]$, $(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\geqslant 0$.

Donc par positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

Ainsi, $\mathrm{I}_n\geqslant\mathrm{K}_n$.

Or, $\mathrm{e}^{-1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}1-t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-1}\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{\sqrt{n}}}=\mathrm{e}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}}$, terme général de signe constant d'une série de Riemann divergente.

En conclusion, comme $\mathrm{I}_n\geqslant\mathrm{K}_n\geqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}}$, d'après les critères de comparaison des séries à terme positif, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{I}_n$ diverge.