Arithmétique (si ! si !)

1 Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

a $\mathrm{I}_0(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{tz}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^z - e^{-z}}{z}$.

Les fonctions $t \longmapsto t$, $t \longmapsto 1 - t^2$ et $t \longmapsto \dfrac{e^{tz}}{z}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1\,;1]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1(z) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\,e^{tz}\,\mathrm{d}t &= \left[(1-t^2)\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2t\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{z}\int_{-1}^{1} te^{tz}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{z}\left(\left[t\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2(e^z + e^{-z})}{z^2} - \frac{2}{z^2}\left[\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1} = \frac{2(e^z+e^{-z})}{z^2} - \frac{2(e^z - e^{-z})}{z^3} \\
&= \frac{4\,\mathrm{ch}(z)}{z^2} - \frac{4\,\mathrm{sh}(z)}{z^3}.
\end{aligned}$$

b Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{(1-t^2)^{n+2}}{(n+2)!}$ et $t \longmapsto \dfrac{e^{tz}}{z}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1\,;1]$, on intègre $\mathrm{I}_{n+2}(z)$ par parties :

$$\mathrm{I}_{n+2}(z) = \int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+2}}{(n+2)!}\,e^{tz}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1-t^2)^{n+2}}{(n+2)!}\frac{e^{tz}}{z}\right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1}\frac{-2t(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t$$

Le crochet étant nul puisque $n+2 \geqslant 1$, on a $\mathrm{I}_{n+2}(z) = \dfrac{2}{z}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{tz}\,\mathrm{d}t$.

On réintègre par parties (légitime) :

$$\mathrm{I}_{n+2}(z) = \frac{2}{z}\left(\left[\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{e^{tz}}{z}\right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+1} - 2(n+1)t^2(1-t^2)^n}{(n+1)!}\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t\right)$$

À nouveau, le crochet est nul (puisque $n+1 \geqslant 1$) :

$$\mathrm{I}_{n+2}(z) = -\frac{2}{z^2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{tz}\,\mathrm{d}t + \frac{4}{z^2}\int_{-1}^{1}\frac{t^2(1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t$$

Dans la deuxième intégrale, on écrit $t^2 = 1 - (1-t^2)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{t^2(1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1}\frac{[1-(1-t^2)](1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{I}_n(z) - (n+1)\mathrm{I}_{n+1}(z).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+2}(z) &= -\frac{2}{z^2}\mathrm{I}_{n+1}(z) + \frac{4}{z^2}\left[\mathrm{I}_n(z) - (n+1)\mathrm{I}_{n+1}(z)\right] \\
&= -\frac{4n+6}{z^2}\mathrm{I}_{n+1}(z) + \frac{4}{z^2}\mathrm{I}_n(z).
\end{aligned}$$

(c) Montrons par récurrence double $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{A}_n \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}], \forall z \in \mathbb{C}^*, \mathrm{I}_n(z) = \dfrac{e^z \mathrm{A}_n(z) - e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}}$

Initialisation — Pour $n = 0$, on a vu que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \mathrm{I}_0(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{z}$.

En posant $\mathrm{A}_0 = 1 \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, on a bien $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{I}_0(z) = \dfrac{e^z \mathrm{A}_0(z) - e^{-z}\mathrm{A}_0(-z)}{z^{2\times 0+1}}$.

— Pour $n = 1$, on a vu que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\mathrm{I}_1(z) = \frac{2(e^z + e^{-z})}{z^2} - \frac{2(e^z - e^{-z})}{z^3} = \frac{(2z-2)e^z - (-2z-2)e^{-z}}{z^3}.$$

En posant $\mathrm{A}_1 = 2\mathrm{X} - 2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, on a bien $\forall z \in \mathbb{C}^*, \mathrm{I}_1(z) = \dfrac{e^z \mathrm{A}_1(z) - e^{-z}\mathrm{A}_1(-z)}{z^{2\times 1+1}}$.

Hérédité Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la propriété soit vraie aux rangs n et $n+1$.

Il existe donc deux polynômes $\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{n+1} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{cases} \mathrm{I}_n(z) = \dfrac{e^z \mathrm{A}_n(z) - e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}} \\ \mathrm{I}_{n+1}(z) = \dfrac{e^z \mathrm{A}_{n+1}(z) - e^{-z}\mathrm{A}_{n+1}(-z)}{z^{2(n+1)+1}}. \end{cases}$$

Alors, d'après la question précédente, $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{n+2}(z) &= -\frac{4n+6}{z^2}\mathrm{I}_{n+1}(z) + \frac{4}{z^2}\mathrm{I}_n(z) \\ &= -\frac{4n+6}{z^2} \times \frac{e^z \mathrm{A}_{n+1}(z) - e^{-z}\mathrm{A}_{n+1}(-z)}{z^{2(n+1)+1}} + \frac{4}{z^2} \times \frac{e^z \mathrm{A}_n(z) - e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}} \\ &= \frac{-(4n+6)\left(e^z \mathrm{A}_{n+1}(z) - e^{-z}\mathrm{A}_{n+1}(-z)\right) + 4z^2\left(e^z \mathrm{A}_n(z) - e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)\right)}{z^{2n+5}} \\ &= \frac{e^z\left[-(4n+6)\mathrm{A}_{n+1}(z) + 4z^2\mathrm{A}_n(z)\right] - e^{-z}\left[-(4n+6)\mathrm{A}_{n+1}(-z) + 4(-z)^2\mathrm{A}_n(-z)\right]}{z^{2n+5}} \\ &= \frac{e^z \mathrm{A}_{n+2}(z) - e^{-z}\mathrm{A}_{n+2}(-z)}{z^{2n+5}}, \end{aligned}$$

où on a posé $\mathrm{A}_{n+2} = -(4n+6)\mathrm{A}_{n+1} + 4\mathrm{X}^2\mathrm{A}_n$.

Comme A_{n+1} et A_n sont des polynômes à coefficients entiers, on en déduit que A_{n+2} est encore un polynôme à coefficients entiers. La propriété est encore vraie au rang $n+2$.

Conclusion : Initialisée pour $n = 0$ et $n = 1$, héréditaire, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Les polynômes A_n sont reliées par la relation de récurrence double précédente :

$$\begin{cases} \mathrm{A}_0 = 1 \\ \mathrm{A}_1 = 2\mathrm{X} - 2 \\ \mathrm{A}_{n+2} = -(4n+6)\mathrm{A}_{n+1} + 4\mathrm{X}^2\mathrm{A}_n. \end{cases}$$

Les expressions de A_n pour les premiers entiers sont :

n	A_n
0	1
1	$2\mathrm{X} - 2$
2	$4\mathrm{X}^2 - 12\mathrm{X} + 12$
3	$8\mathrm{X}^3 - 48\mathrm{X}^2 + 120\mathrm{X} - 120$
4	$16\mathrm{X}^4 - 160\mathrm{X}^3 + 720\mathrm{X}^2 - 1680\mathrm{X} + 1680$

On peut conjecturer que le monôme dominant de A_n est $2^n X^n$.

Par récurrence double :

Initialisation C'est vrai pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

Hérédité Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} A_n = 2^n X^n + \cdots \\ A_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + \cdots \end{cases}$.

Alors,

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= -(4n+6)A_{n+1} + 4X^2 A_n \\ &= -(4n+6)(2^{n+1}X^{n+1} + \cdots) + 4X^2(2^n X^n + \cdots) \\ &= -(4n+6)2^{n+1}X^{n+1} + \cdots + 2^{n+2}X^{n+2} + \cdots \\ &= 2^{n+2}X^{n+2} + \cdots \end{aligned}$$

La propriété est encore vraie au rang $n+2$.

Conclusion : Initialisée pour $n \leqslant 1$ et héréditaire, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, le degré de A_n est n et son coefficient dominant est 2^n.

2 a Supposons que $\omega \in \mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$. On peut poser $\omega = r + ir'$ avec $r, r' \in \mathbb{Q}$.

En particulier, $\omega \neq 0 \implies \bar{\omega} \neq 0$ et $r^2 + r'^2 = \omega\bar{\omega} \neq 0$.

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{r+ir'} = \frac{r-ir'}{r^2+r'^2} = \underbrace{\frac{r}{r^2+r'^2}}_{\in\mathbb{Q}} + i\underbrace{\frac{-r'}{r^2+r'^2}}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}(i).$$

b Montrons que $\mathbb{Z}[i] = \left\{a + bi, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est stable par addition et multiplication.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

— Alors $z + z' = (a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b+b') \in \mathbb{Z}[i]$ car $\begin{cases} a + a' \in \mathbb{Z} \\ b + b' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

— Et $zz' = (a+ib)(a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \in \mathbb{Z}[i]$ car $\begin{cases} aa' - bb' \in \mathbb{Z} \\ ab' + a'b \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

En conclusion, $\mathbb{Z}[i]$ est stable par addition et multiplication.

c Comme $\omega \in \mathbb{Q}(i)$, on peut poser $\omega = \frac{a}{b} + i\frac{a'}{b'}$ avec $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $b, b' \in \mathbb{N}^*$.

Il suffit de mettre au même dénominateur : $\omega = \dfrac{ab' + ia'b}{bb'} = \dfrac{p}{q}$ en posant

$$\begin{cases} p = ab' + ia'b \in \mathbb{Z}[i] \\ q = bb' \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

La réciproque est claire.

3 On suppose qu'il existe un $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

a Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n(z) = \dfrac{e^z A_n(z) - e^{-z} A_n(-z)}{z^{2n+1}}$.

— On a supposé que $z \in \mathbb{Q}(i)$. D'après le lemme, on peut écrire $z = \dfrac{P}{q}$ avec $P \in \mathbb{Z}[i]$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

— On sait que le degré de A_n est n et que $A_n \in \mathbb{Z}[X]$. On peut donc poser $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec les a_k entiers.

Par conséquent, $A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{P}{q}\right)^k = \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^{n} a_k P^{n-k} \alpha^k$.

Mais comme $P \in \mathbb{Z}[i]$, d'après la question 2 b, on a encore $P^k \in \mathbb{Z}[i]$ pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$.

Donc, comme $a_k q^{n-k} \in \mathbb{Z}$, par produit, $a_k q^{n-k} P^k \in \mathbb{Z}[i]$, et par somme (toujours d'après 2 b) $\sum_{k=0}^{n} a_k q^{n-k} P^k \in \mathbb{Z}[i]$.

On peut donc poser $A_n(z) = \frac{\beta_n}{q^n}$ avec $\beta_n \in \mathbb{Z}[i]$.

De même, on peut écrire $A_n(-z) = \frac{1}{q^n} \beta'_n$ avec $\beta'_n \in \mathbb{Z}[i]$.

— Par hypothèse, on a $e^z \in \mathbb{Q}(i)$. Comme $e^z \neq 0$ alors $e^{-z} = \frac{1}{e^z} \in \mathbb{Q}(i)$ d'après 2 b.

D'après 2 c, on peut écrire $e^z = \frac{B}{b}$ et $e^z = \frac{C}{c}$ avec $B, C \in \mathbb{Z}[i]$ et $b, c \in \mathbb{N}^*$.

— z étant non nul et dans $\mathbb{Q}(i)$, on a encore $\frac{1}{z} \in \mathbb{Q}(i)$.

D'après 2 c, on peut écrire $\frac{1}{z} = \frac{R}{r}$ avec $R \in \mathbb{Z}[i]$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

Finalement,

$$I_n(z) = \frac{1}{z^{2n+1}}(e^z A_n(z) - e^{-z} A_n(-z)) = \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+1} \left(\frac{B}{b}\frac{\beta_n}{q^n} - \frac{C}{c}\frac{\beta'_n}{q^n}\right) = \frac{R^{2n+1}(cB\beta_n - bC\beta'_n)}{bcq^n r^{2n+1}}.$$

En posant $k = bcqr^3 \in \mathbb{N}^*$, on a $k^n I_n(z) = b^{n-1}c^{n-1}r^{n-1}R^{2n+1}(cB\beta_n - bC\beta'_n) \in \mathbb{Z}[i]$.

En conclusion, on a prouvé qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ k^n I_n(z) \in \mathbb{Z}[i].$$

b On a $|k^n I_n(z)| = \frac{k^n}{n!} \left| \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, e^{tz} \, dt \right| \leqslant \frac{k^n}{n!} \int_{-1}^{1} \left|(1-t^2)^n \, e^{tz}\right| dt$.

Or, $\forall t \in [-1\,;1]$, $\quad \left|(1-t^2)^n \, e^{tz}\right| \leqslant \left|e^{tz}\right| = e^{\mathrm{Re}\,(tz)} = e^{t\,\mathrm{Re}\,(z)}$.

Par croissance de l'intégrale (avec $-1 \leqslant 1$), on en déduit que

$$\int_{-1}^{1} \left|(1-t^2)^n \, e^{tz}\right| dt \leqslant \int_{-1}^{1} e^{t\,\mathrm{Re}\,(z)} \, dt.$$

On peut poser $C = \int_{-1}^{1} e^{t\,\mathrm{Re}\,(z)} \, dt$. Cette quantité (finie) ne dépend pas de n.

On a $|k^n I_n(z)| \leqslant C\frac{k^n}{n!}$. Et comme $k^n = o\,(n!)$ (cours), on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} C\frac{k^n}{n!} = 0$.

Finalement,

$$\lim_{n \to +\infty} k^n I_n(z) = 0.$$

c D'après la question précédente, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad |k^n I_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Or, d'après 3 a, $k^n I_n(z) \in \mathbb{Z}[i]$.

Comme le seul élément de $\mathbb{Z}[i]$ dans le disque de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ est 0, on en déduit :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad k^n I_n(z) = 0.$$

4 (a) $\operatorname{Re}(\mathrm{I}_n(z)) = \operatorname{Re}\left(\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!}\, e^{tz}\,\mathrm{d}t\right)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!}\, \operatorname{Re}\left(e^{t(x+iy)}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!}\, e^{tx}\operatorname{Re}\left(e^{ity}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, e^{tx}\cos(ty)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n[\operatorname{ch}(xt)+\operatorname{sh}(xt)]\cos(ty)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\operatorname{sh}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Or,

— La fonction $t \longmapsto (1-t^2)^n\operatorname{ch}(xt)\cos(ty)$ est paire :

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^n\operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t.$$

— La fonction $t \longmapsto (1-t^2)^n\operatorname{sh}(xt)\cos(ty)$ est impaire :

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Finalement,

$$\operatorname{Re}(\mathrm{I}_n(z)) = \frac{2}{n!}\int_{0}^{1} (1-t^2)^n\operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $k^n\mathrm{I}_n(z) = 0$.

Comme $k^n \neq 0$ (puisque $k \neq 0$), on en déduit que $\mathrm{I}_n(z) = 0$ puis $\operatorname{Re}(\mathrm{I}_n(z)) = 0$.

Comme $\dfrac{2}{n!} \neq 0$, c'est l'autre facteur qui est nul :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \int_{0}^{1} (1-t^2)^n\operatorname{ch}(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

— $\forall\, t \in [0,\delta], \quad 1+t \geqslant 1$

Donc, en multipliant par $1-t \geqslant 0$, on a $1-t^2 \geqslant 1-t \geqslant 0$.

On peut mettre ces quantités positives à la puissance n sans changer l'ordre :

$$\forall\, t \in [0,\delta], \quad (1-t^2)^n \geqslant (1-t)^n \geqslant 0 \quad (1)$$

— La fonction ch prenant ses valeurs dans $[1,+\infty[$, on a :

$$\forall\, t \in [0,\delta], \quad \operatorname{ch}(xt) \geqslant 1. \quad (2)$$

— $\forall\, t \in [0,\delta], \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta$. En multipliant par $|y| \geqslant 0$: $\quad 0 \leqslant t|y| \leqslant \delta|y| < \dfrac{\pi}{3}$.

Comme cos est décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$, on a $\cos(t|y|) \geqslant \cos\dfrac{\pi}{3}$.

La fonction cos étant paire, on en déduit :

$$\forall\, t \in [0,\delta], \quad \cos(ty) \geqslant \frac{1}{2}. \quad (3)$$

En multipliant ces trois inégalités membre à membre (tous les membres étant positifs), on obtient :

$$\forall\, t \in [0, \delta], \quad (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty) \geqslant \frac{1}{2}(1-t)^n.$$

Par croissance de l'intégrale, comme $0 < \delta$,

$$\int_0^\delta (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^\delta \frac{1}{2}(1-t)^n \,\mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\int_0^\delta \frac{1}{2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^\delta = \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}$.

Donc,

$$\int_0^\delta (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_\delta^1 |(1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)|\,\mathrm{d}t$.

— $\forall\, t \in [\delta, 1], \quad 0 < \delta \leqslant t \leqslant 1$ donc $\delta^2 \leqslant t^2 \leqslant 1$, puis $0 \leqslant 1-t^2 \leqslant 1-\delta^2$, et

$$\forall\, t \in [\delta, 1], \quad 0 \leqslant (1-t^2)^n \leqslant (1-\delta^2)^n. \quad (1)$$

— $\forall\, t \in [\delta, 1], \quad 0 < t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant t|x| \leqslant |x|$.

La fonction ch étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall\, t \in [\delta, 1], \quad \operatorname{ch}(t|x|) \leqslant \operatorname{ch}(|x|)$.

Cette fonction étant également paire, on a $\operatorname{ch}(t|x|) = \operatorname{ch}(tx)$ et $\operatorname{ch}(|x|) = \operatorname{ch}(x)$.

D'où,

$$\forall\, t \in [\delta, 1], \quad 0 \leqslant \operatorname{ch}(tx) \leqslant \operatorname{ch}(x). \quad (2)$$

— La fonction $|\cos|$ étant majorée par 1, on a :

$$\forall\, t \in [\delta, 1], \quad |\cos(yt)| \leqslant 1. \quad (3)$$

En multipliant ces trois inégalités membre à membre (tous les membres étant positifs), on obtient :

$$\forall\, t \in [\delta, 1], \quad |(1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)| \leqslant (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x)$$

Par croissance de l'intégrale, comme $\delta < 1$,

$$\int_\delta^1 |(1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\delta^1 (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\int_\delta^1 (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}t = (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x) \int_\delta^1 \mathrm{d}t = (1-\delta^2)^n(\operatorname{ch}(x))(1-\delta) \leqslant (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x)$.

Finalement,

$$\left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x).$$

5 On a vu que $\forall\, n \geqslant n_0, \quad \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t = 0$.

D'après la relation de Chasles $\forall\, n \geqslant n_0, \quad \displaystyle\int_0^\delta (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t + \int_\delta^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = 0$.

Donc $\forall n \geqslant n_0, \quad \displaystyle\int_0^\delta (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = -\int_\delta^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t.$

En prenant la valeur absolue :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \int_0^\delta (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = \left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Or,

— d'après 4 c, on a $\forall n \geqslant n_0, \quad \displaystyle\int_0^\delta (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}$,

— d'après 4 d, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x).$

On en déduit :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)} \leqslant (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x) \iff 1-(1-\delta)^{n+1} \leqslant 2(n+1)(1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x). \tag{XXIX.1}$$

Or,

— $1-\delta \in]0\,;1[$, donc $1-(1-\delta)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

— $1-\delta^2 \in]0\,;1[$, donc $(1-\delta^2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par croissances comparées, $2(n+1)(1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

En passant à la limite dans l'inégalité (XXIX.1), on aboutit à $1 \leqslant 0$ ce qui est absurde !

L'hypothèse formulée est donc fausse :

Il n'existe aucun complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

6 Le plus dur est fait. Maintenant, il suffit d'appliquer :

a Supposons que π soit rationnel. Alors, on aurait $i\pi \in \mathbb{Q}(i)$. Ce nombre étant non nul, d'après le théorème précédent, on aurait $e^{i\pi} \notin \mathbb{Q}(i)$. Or $e^{i\pi} = -1$. C'est absurde !

D'où π est irrationnel.

b Comme 1 est non nul et rationnel, on en déduit que e est irrationnel.

De même, e^2 est irrationnel.

On peut généraliser à

$$\forall r \in \mathbb{Q}^*, \quad e^r \notin \mathbb{Q}.$$

c Comme $e^{\ln(2)} = 2$ est rationnel et que $\ln(2) \neq 0$, on en déduit que $\ln(2)$ est irrationnel.

De même, $\ln(3)$ est irrationnel.

On peut généraliser à

$$\forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \quad \ln(r) \notin \mathbb{Q}.$$